MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 14)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

En la clase anterior

Finalizamos el método de resolución de **ecuaciones lineales homogéneas a coeficientes constantes** (los 4 casos).

Nuestro nuevo objetivo es resolver **ecuaciones lineales no-homogéneas**

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

En general sabemos que:

- Si $p_1, \ldots, p_n$, f son continuas en $\mathcal{I}$, entonces existe solución única en $\mathcal{I}$ a cualquier PVI con condiciones iniciales en $x = a \in \mathcal{I}$.
- La solución general de la ecuación es:

$$y(x) = y_c(x) \; + \; y_p(x)$$

$y_c(x)$: solución complementaria (sol. gral. a la ec. homogénea)
$y_p(x)$: solución particular de la ec. no-homogénea.

Método de coeficientes indeterminados: método para encontrar una solución particular en ecuaciones con coeficientes constantes

Método de coeficientes indeterminados

Consideremos $f(x)$ igual a

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)e^{rx}\cos(kx) \quad \text{o} \quad (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)e^{rx}\text{sen}(kx)$$

Regla 1.

- Obtenemos primero la solución complementaria
- Supongamos que **ningún** sumando de $f(x)$ ni de sus derivadas aparecen en la solución complementaria.
- Tomamos entonces $y_p(x)$ como una combinación lineal de los términos linealmente independientes que aparecen en f y sus derivadas, es decir

$$\begin{aligned} y_p(x) =& (A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{rx}\cos(kx) \\ &+ (B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)e^{rx}\text{sen}(kx) \end{aligned}$$

- Las constantes $A's$ y $B's$ se encuentran usando la ecuación diferencial.

Algunos casos específicos:

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \quad &\longrightarrow \quad y_p(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m \\
f(x) = Ce^{rx} \quad &\longrightarrow \quad y_p(x) = Ae^{rx} \\
f(x) = C\cos(kx) \quad &\longrightarrow \quad y_p(x) = A\cos(kx) + B\text{sen}(kx) \\
f(x) = Cx^2\text{sen}(kx) \quad &\longrightarrow \quad y_p(x) = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\cos(kx) \\
&\qquad\qquad +(B_0 + B_1 x + B_2 x^2)\text{sen}(kx)
\end{aligned}
$$

etc...

Ejemplos Resolver $(D-1)(D-2)y = 3xe^{-x}$

Notar que si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, es posible separar le ecuación $L[y] = f$ en varias partes, ya que

$$\text{si} \quad L[y_1] = f_1, \quad L[y_2] = f_2 \quad \Rightarrow \quad L[y_1 + y_2] = f_1 + f_2 = f\,.$$

En general ,si $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_m$, y queremos resolver $L[y] = f$, una **posible estrategia** es:

$$\text{resolver} \begin{cases} L[y_1] = f_1 \\ L[y_2] = f_2 \\ \vdots \\ L[y_m] = f_m \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{solución final:} \\ y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m. \end{array}$$

Ejemplo. Resolver $\quad y'' - 3y' + 2y = 3xe^{-x} - 10\cos(3x)$

Método de coeficientes indeterminados

Para $f(x)$ igual a

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)e^{rx}\cos(kx) \quad \text{o} \quad (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)e^{rx}\text{sen}(kx)$$

Regla 2.

- Obtener primero la solución complementaria
- Supongamos que **algunos** términos de $f(x)$ o de sus derivadas aparecen en la solución complementaria.
- Tomamos entonces $y_p(x)$ como la respuesta de la Regla 1 multiplicada por una potencia x^s, es decir,

$$\begin{aligned} y_p(x) =& x^s(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{rx}\cos(kx) \\ &+ x^s(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)e^{rx}\text{sen}(kx) \end{aligned}$$

Exponente s: es el menor número natural tal que ningún sumando en y_p es solución de la EDO homogénea.

Ejemplo. Resolver $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos(2x)$

El siguiente método, en principio, nos permite calcular una solución particular para cualquier EDO lineal no-homogénea, siempre que conozcamos la solución complementaria.

Método de variación de parámetros.

Consideremos la ecuación:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

y la solución general a la ecuación homogénea:

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x).$$

El método consiste en buscar una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x).$$

donde $u_1, \ldots, u_n$ son funciones.

Obs. Nos enfocaremos en el caso de ecuaciones de 2do orden.

Teorema. [Variación de parámetros]

Para la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

con solución complementaria

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

Se demuestra que

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx, \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx$$

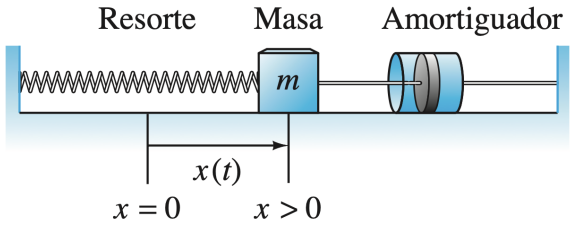
donde $W = W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de las funciones l.i. y_1, y_2 (soluciones de la ec. homogénea).En resumen

$$\boxed{y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx.}$$

Ejemplo: resolver $y'' + y = \tan(x)$.

Aplicamos lo aprendido sobre EDO's lineales para estudiar el **modelo de vibraciones mecánicas**.

Recordemos el sistema **masa-resorte-amortiguados**:



$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

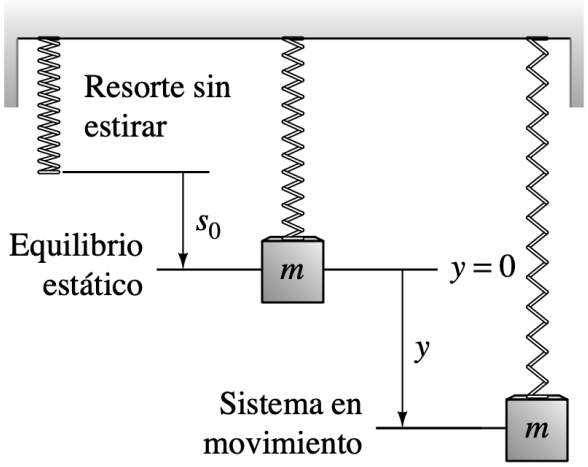
$x(t)$: desplazamiento horizontal de la masa con respecto al equilibrio
m: masa del objeto
c: constante de amortiguamiento
k: constante del resorte
$F(t)$: fuerza externa

Estudiaremos distintos escenarios:

- Movimiento libre no amortiguado $(F(t) = c = 0, \quad k > 0)$
- Movimiento libre amortiguado $(F(t) = 0, \quad k, c > 0)$
- Movimiento forzado $(F(t) \neq 0, \quad k, c > 0)$

Otros escenarios donde aparece el modelo de vibraciones mecánicas:

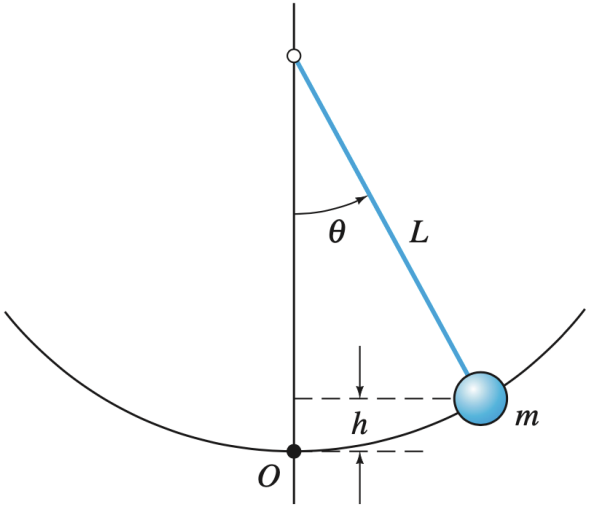
Masa suspendida por resorte



$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

$y(t)$: desplazamiento vertical en torno a equilibrio.
c: constante de fricción
$F(t)$: fuerza externa (distinta a la gravedad)

Péndulo simple



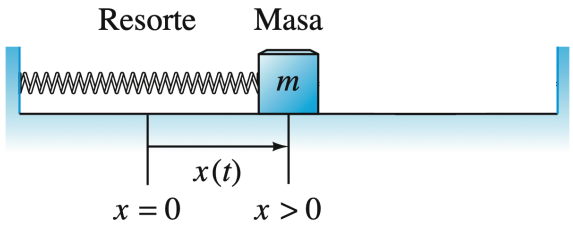
$$\theta'' + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta) = 0$$

$\theta(t)$: ángulo cor respecto a la vertical
L: largo del péndulo

Aproximación lineal: si $k = g/L$

$$\theta'' + k\theta = 0 \quad \text{(sin fricción)}$$
$$\theta'' + c\theta' + k\theta = 0 \quad \text{(con fricción)}$$

Movimiento libre no amortiguado

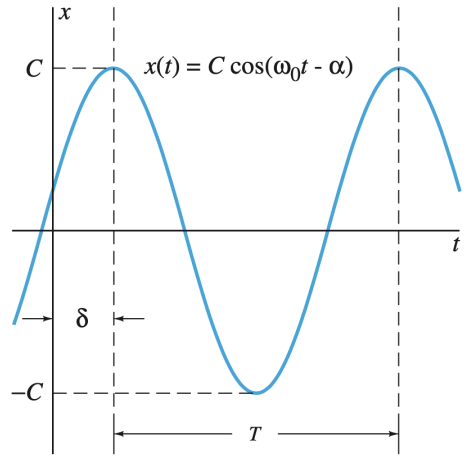


$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Raíces pol. caract. $r = \pm i\omega_0$

Solución general: $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\text{sen}(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha)} \quad \textbf{(movimiento armónico simple)}$$



Constantes:

Amplitud: C

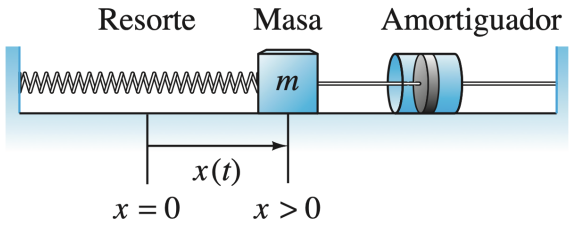
Frecuencia angular: ω_0

Ángulo de fase: α

Otras cantidades relevantes:

periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$; frecuencia: $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$; tiempo de retraso: $\delta = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$

Movimiento libre amortiguado



$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad p = \frac{c}{2m}$$

Raíces pol. caract. $r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$

$\Rightarrow$ la solución general depende del signo de $p^2 - \omega_0^2 = \dfrac{c^2 - 4km}{4m^2}$

$\Rightarrow$ el signo cambia cuando $c = \underbrace{\sqrt{4km}}_{c_{cr}}$ (**amortiguamiento crítico**)

$\Rightarrow$ hay 3 casos: $c > c_{cr}$, $c = c_{cr}$, $c < c_{cr}$.

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \qquad r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad p = \frac{c}{2m}, \quad p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}$$

Caso sobreamortiguado: $c > c_{cr} \quad (p^2 > \omega_0^2)$

Raíces polinomio característico:

$$r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \quad \text{reales, distintas y negativas } (r_1, r_2)$$

Solución general: $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \qquad r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad p = \frac{c}{2m}, \quad p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}$$

Caso críticamente amortiguado: $c = c_{cr} \quad (p^2 = \omega_0^2)$

Raíces polinomio característico:

$r = -p$ real, repetida y negativa

Solución general: $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-pt}$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \qquad r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad p = \frac{c}{2m}, \quad p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}$$

Caso subamortiguado: $c < c_{cr} \quad (p^2 < \omega_0^2)$

Raíces polinomio característico:

$$r = -p \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}}_{\omega_1} \quad \text{complejas conjugadas}$$

Solución general: $x(t) = (A\cos(\omega_1 t) + B\text{sen}(\omega_1 t))e^{-pt}$

o también $x(t) = Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \alpha)$

Otras cantidades relevantes:

pseudo-frecuencia angular: $\omega_1 \ (< \omega_0)$ pseudo-periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

amplitud variable: Ce^{-pt}