PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
2024, Segundo Semestre.

Interrogación 2
Ecuaciones Diferenciales

1. Calcule la solución general de la ecuación

$$y''' + y'' - 2y' = 0.$$

Solución: La ecuación característica $r^3 + r^2 - 2r = 0$ tiene soluciones a $-2, 0$ y 1. Luego, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 + c_3 e^x,$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes reales.

Corrección:

a) 0,6 por las raíces de la ecuación característica.

b) 0,6 por la solución general.

2. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 7x - x^2 - 10$$

Encuentre todos los puntos críticos y clasifique los correspondientes equilibrios como fuente, sumidero o nodo.

Solución: Factorizando obtenemos $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -(x-2)(x-5)$. Por lo tanto los puntos críticos son 2 y 5. Hacemos la tabla de signos:

$x \in$	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
$x - 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$+$
$-(x-2)(x-5)$	$-$	$+$	$-$

con la que podemos notar que el punto crítico $x = 2$ es una fuente y el punto crítico $x = 5$ es un sumidero.

Corrección:

a) 0,4 puntos por encontrar los puntos críticos.

b) 0,4 puntos por la tabla de signos.

c) 0,4 puntos por clasificar correctamente los puntos críticos.

3. Resuelva el problema con condición inicial

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= 2x \qquad (1)\\ y(0) = 4 \qquad y'(0) &= 8, \end{aligned}$$

sabiendo que $y_1(x) = e^x \cos(x)$ e $y_2(x) = e^x \operatorname{sen}(x)$ satisfacen la ecuación homogénea correspondiente $y'' - 2y' + 2y = 0$ y que $y_3(x) = x + 1$ es solución de (1).

Solución: Si y_1 e y_2 son linealmente independientes, entonces la solución general de (1) es $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$. Aunque no tengamos certeza de que y_1 e y_2 son L.I., si sabemos que cualquier función de la forma $c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$ es solución de (1) y podemos intentar una función de la forma $c_1y_1+c_2y_2+y_3$ que satisfaga las condiciones iniciales del PVI. Para esto encontramos las derivadas $y_1' = e^x \cos(x) - e^x \operatorname{sen}(x)$, $y_2' = e^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x)$, $y_3' = 1$. Reemplazado la condición inicial $y(0) = 4$ en $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$ encontramos $y(0) = c_1 + 1 = 4$, i.e. $c_1 = 3$. Reemplazando la condición inicial $y'(0) = 8$ obtenemos $c_1 + c_2 + 1 = 8$, es decir $c_2 = 4$. La solución del PVI es $y = 3e^x \cos(x) + 4e^x \operatorname{sen}(x) + x + 1$.

Corrección:

a) 0,5 puntos por plantear la solución de la forma $c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$

b) 0,3 puntos por calcular correctamente la derivadas de y_1, y_2 e y_2 (1 punto por cada función)

c) 0,4 por reemplazar la condición inicial y encontrar c_1 y c_2.

4. *a*) Muestre que las funciones y_1 e y_2 de la pregunta 3 definidas en $\mathbb{R}$ son linealmente independientes.

Solución: Basta mostrar el Wronskiano en algún punto de $\mathbb{R}$ es distinto de 0, por ejemplo se puede calcular en 0.

Corrección: 0,3 por mostrar que el Wronskiano es distinto de cero y concluir que son linealmente independientes.

b) Considere las funciones f_1 y f_2 definidas en todo $\mathbb{R}$ por las fórmulas $f_1(x) = x^2$ y

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{si } x \geq 0; \\ -x^2 & , \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Muestre que para todo x en $\mathbb{R}$, $W(f_1(x), f_2(x)) = 0$. Muestre que f_1 y f_2 son linealmente independientes. ¿Pueden f_1 y f_2 ser soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2?

Solución: Un cálculo directo muestra que para todo x en $\mathbb{R}$, $W(f_1(x), f_2(x)) = 0$. Para esto hay que separar los casos $x \geq 0$ y $x < 0$.

Para mostrar que f_1 y f_2 son linealmente independientes, supongamos que existen c_1 y c_2 tal que $c_1 f_1 + c_2 f_2$ es igual a la función nula. Evaluando esta combinación lineal en 1 y -1 tenemos que $c_1 + c_2 = 0$ y $c_1 - c_2 = 0$. Lo que implica que $c_1 = c_2 = 0$. Luego, f_1 y f_2 son linealmente independientes.

Por último, f_1 y f_2 no pueden ser soluciones de la misma ecuación lineal homogénea de order dos pues en ese caso el Wronskiano tiene que ser distinto de cero en todo $\mathbb{R}$ dado que f_1 y f_2 son linealmente independientes.

Corrección:

1) 0,3 por mostrar que el Wronskiano es igual a cero en todo $\mathbb{R}$.
2) 0,3 por mostrar que f_1 y f_2 son l.i..
3) 0,3 por concluir que f_1 y f_2 no pueden ser solución de una misma ecuación diferencial lineal homogenea de orden 2.

5. Considere una población $P(t)$ con tasa de mortalidad δ y con tasa de natalidad β de manera que el incremento $\Delta P(t)$ de la población en un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ es aproximadamente

$$\Delta P(t) \approx \beta(t)P(t)\Delta t - \delta(t)P(t)\Delta t.$$

Suponga que la tasa de mortalidad es constante $\delta(t) = 0,01$ y la tasa de natalidad $\beta(t)$ es proporcional a P. Asuma que $P(0) = 200$ y que $P'(0) = 2$. ¿Cuándo se alcanza P=1000? ¿Hay explosión demográfica en este modelo?

Solución: La ecuación diferencial que modela la población $P(t)$ es

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP^2 - 0,01P \tag{2}$$

para alguna constante k positiva. Usando la condición de la derivada en 0 tenemos

$$k(200)^2 - \frac{1}{100}200 = 2.$$

Luego,

$$k = \frac{1}{10^4}. \tag{3}$$

Así la ecuación (2) queda

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{10^4}(P - 100)P \tag{4}$$

La solución de (4) es

$$P(t) = \frac{100}{1 - Ce^{\frac{t}{100}}}, \tag{5}$$

para alguna constante C en $\mathbb{R}$. Despejando la condición inicial tenemos que

$$C = \frac{1}{2}.$$

uego

$$P(t) = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{100}}}. \tag{6}$$

Para calcular cuando $P = 1000$ resolvemos la ecuación

$$\frac{100}{1 - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{100}}} = 1000.$$

Lo que nos da

$$t_0 = 100 \ln \frac{9}{5}. \tag{7}$$

Por último, la población explota en $t_* = 100 \ln 2$.

Corrección

a) 0,2 por escribir la ecuación diferencial.

b) 0,2 por calcular k.

c) 0,2 por calcular la solución.

d) 0,2 por calcular C.

e) 0,2 por calcular t_0.

f) 0,2 por calcular t_*.