MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Clase 1)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Introducción a las ecuaciones diferenciales

Recordemos que en los inicios del Cálculo, Newton buscaba entender fenómenos físicos reales (ej. movimiento planetario), es decir,



el Cálculo fue desarrollado para entender el comportamiento de cantidades físicas que varían en función de otras, y precisamente estas restricciones corresponden a **ecuaciones diferenciales**.

(Algebra: busca responder preguntas prácticas sobre cantidades que satisfacen relaciones estáticas)

Al ejercicio de representar situaciones del mundo real en lenguaje matemático se le denomina Modelación Matemáticas.

Esta busca plantear modelos matemáticos (ej. ec's algebraicas, ec's diferenciales) que representen una situación real específica.

Objectivo del Cálculo y las Ecuaciones Diferenciales, es representar ciertas situaciones reales, comprenderlas y predecir resultados.

En este contexto, las ecuaciones diferenciales son una nueva herramienta matemática que nos permite modelar una gran cantidad de fenómenos naturales y problemas aplicados.

Advertencia: aprenderemos a trabajar con ecuaciones diferenciales desde un punto de vista abstracto, es decir, sin enfocarnos en alguna aplicaciones específicas (estas aparecerán en ejemplos y ejercicios).

Definición general y terminología

Def. En palabras: definimos una ecuación diferencial ordinara (EDO) como una igualdad (ecuación) que relaciona una función desconocida con una o más de sus derivadas.

De manera rigurosa: sea $n \in \mathbb{N}$ y $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, una EDO de orden n es una igualdad de la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

donde $y(x)$ es una función desconocida; x es una variable independiente.

- La ecuación se dice ordinaria por que involucra una única variable independiente.
  (si la ecuación involucra funciones de más de una variable y sus derivadas parciales, esta se denomina ecuación diferencial parcial)
- El orden de la ecuación es el orden de la derivada más alta.
- $u(x)$ es solución de la EDO en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si las derivadas $u', u'', \ldots, u^{(n)}$ existen en I y además

$$F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Tipos de EDO's: Dependiendo de la forma de la función F existen dos grandes categorías.

- EDO's lineales $\longrightarrow$ F es lineal en sus argumentos $y, y', \ldots, y^{(n)}$

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x) = 0$$

- EDO's no-lineales $\longrightarrow$ si F no es lineal en alguno de sus argumentos $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Nos enfocaremos en ecuaciones que se puedan escribir en forma normal

$$y^{(n)} = G(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

donde $G : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Ejemplos. Considere

1. la EDO $(x'(t))^2 + x(t)^2 = -1$
2. la EDO $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$
3. ¿Qué EDO satisface la función $y(x) = A\cos(3x) + B\text{sen}(3x)$?

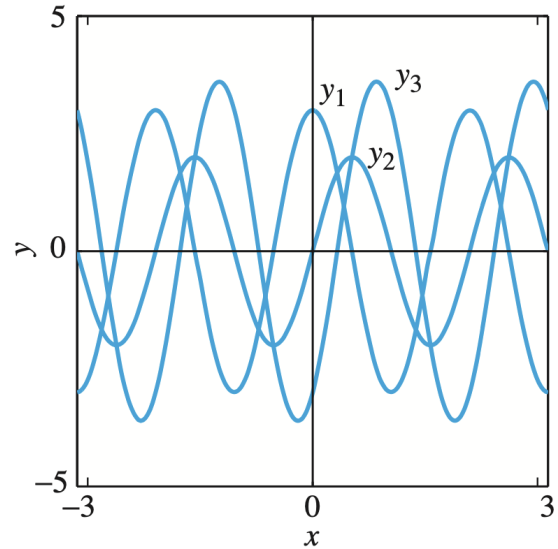


FIGURA 1.1.6. Las tres soluciones $y_1(x) = 3\cos 3x$, $y_2(x) = 2\text{ sen } 3x$ y $y_3(x) = -3\cos 3x + 2\text{ sen } 3x$ de la ecuación diferencial $y'' + 9y = 0$.

Obs. En general, las ecuaciones de orden n tienen familias n-paramétricas de soluciones.

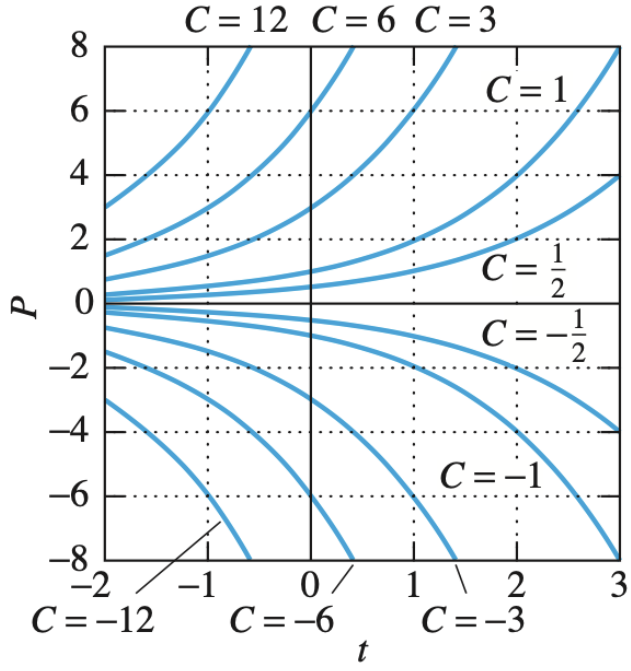
Recordemos que utilizamos las EDO's para modelar situaciones reales. Su estudio tiene 3 objetivos principales:

1. Dada una situación real específica, buscamos determinar una EDO que represente aquel fenómeno (proceso de modelación matemática)

2. Encontrar –exacta o aproximadamente– la o las soluciones a la ecuación.

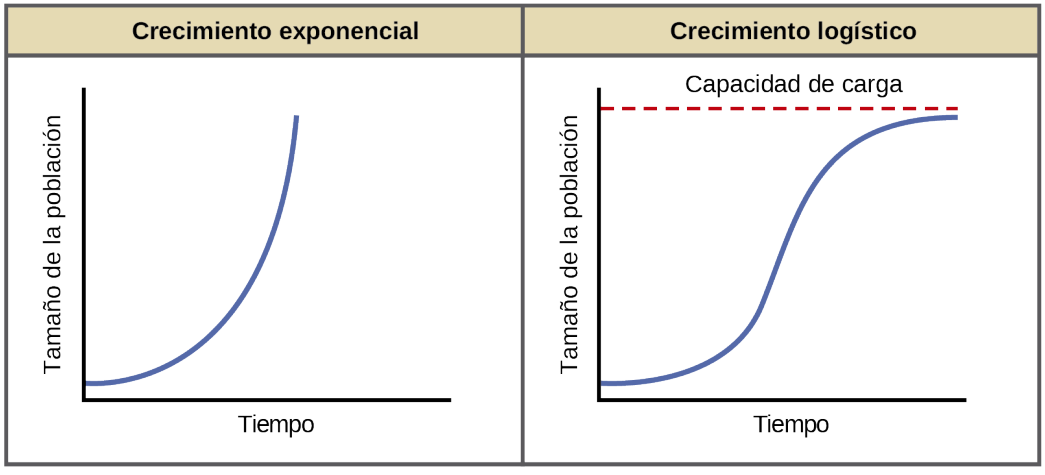
3. Interpretar la solución encontrada.

Ejemplo. Modelos de crecimiento poblacional: $P'(t) = kP(t)$



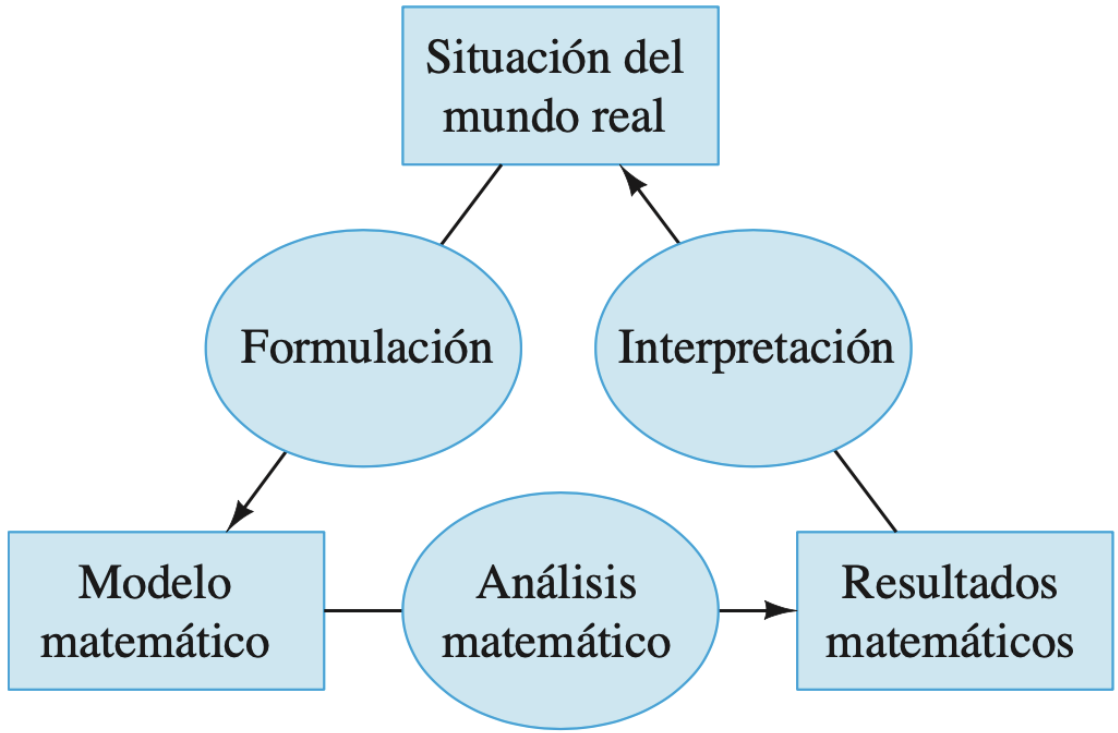
Un modelo más exacto es el de crecimiento con capacidad de carga:

$$P' = k\left(\frac{M-P}{M}\right)P$$



(a) (b)

Proceso del modelamiento matemático



Contenido del curso

El curso estará dividido en 4 capítulos:

1. EDO's de 1er orden
2. EDO's de orden superior
3. Sistemas de EDO's
4. Transformada de Laplace