MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 9)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

En la clase anterior...

- Finalizamos el estudio cualitativo de modelos de crecimiento poblacional.

  Modelo general: $\dfrac{dP}{dt} = (\beta(t) - \delta(t))P$

  Modelos específicos:

  - Modelo de crecimiento natural $\rightarrow$ $\dfrac{dP}{dt} = kP$
  - Modelo logístico $\rightarrow$ $\dfrac{dP}{dt} = k(M - P)P$
  - Modelo explosión/extinción $\rightarrow$ $\dfrac{dP}{dt} = k(P - M)P$

- Iniciamos el estudio cualitativo de EDO's autonomas: $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$

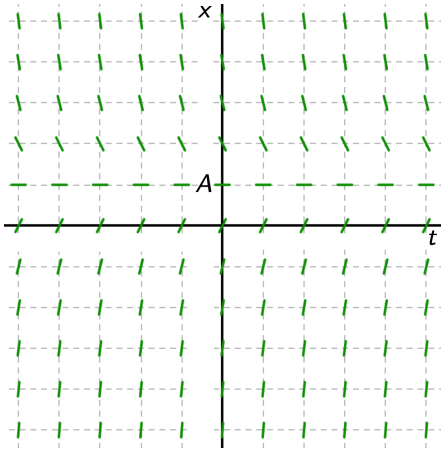
  Recordamos los campos de pendientes y las curvas isoclinas.

  Definimos los puntos críticos y vimos su relación con soluciones de equilibrio.

Consideremos la EDO: $\dfrac{dx}{dt} = -k(x - A)$, con $k > 0$.

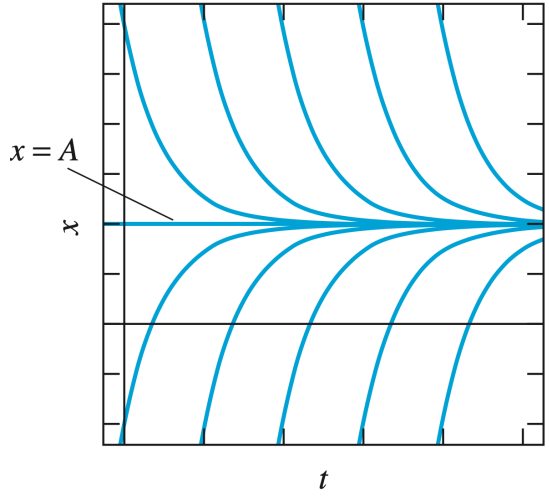
(Aparece en la ley de enfriamiento de Newton para un medio a temperatura constante $A > 0$)

Campo de pendientes



$\Rightarrow$

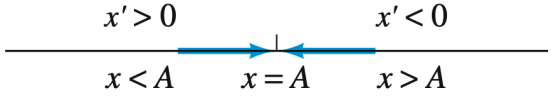
Algunas curvas solución



Punto crítico: $x_0 = A \quad \Rightarrow \quad$ Solución de equilibrio: $x(t) = A$.

Vemos que las soluciones convergen a la de equilibrio cuando $t \to \infty$.

El comportamiento de las soluciones en torno a los equilibrios se puede representar por medio de un **diagrama de fase**, el cual indica la dirección de cambio de las soluciones, si divergen o convergen a una solución de equilibrio.

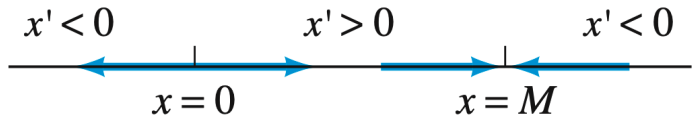


Consideremos ahora el **modelo logístico**, $\dfrac{dx}{dt} = kx(M-x)$, con $x > 0$, $k > 0$ y $M > 0$.

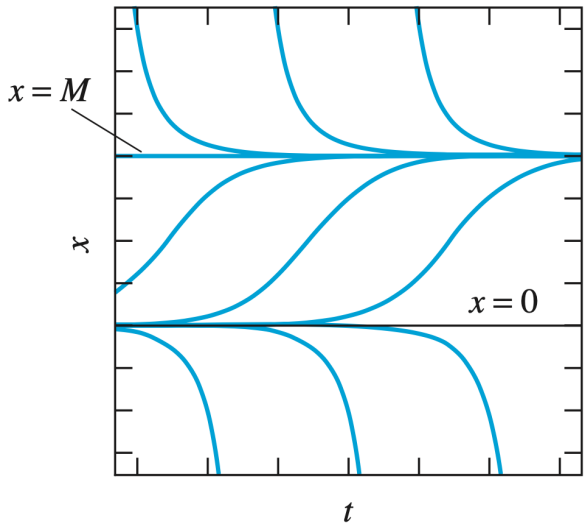
Puntos críticos: $kx(M-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ y $x = M$.

Soluciones de equilibrio: $x(t) = 0 \quad$ y $\quad x(t) = M$.

Diagrama de fase:

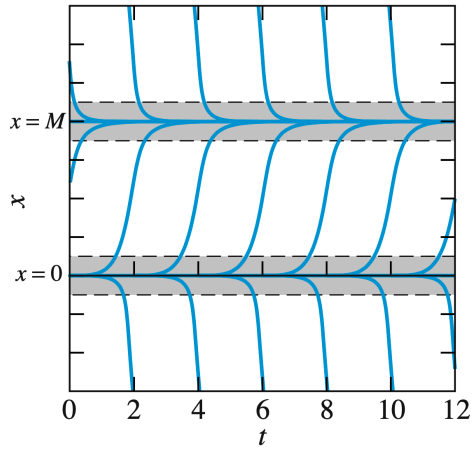


Del campo de pendientes se obtienen algunas curvas soluciones:



Podemos corroborar todo lo anterior con la solución exacta (con cond. inicial $x(0) = x_0$):

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{-kMt}}, \qquad x_0 \in \mathbb{R}.$$



Observemos que hay comportamientos distintos de las soluciones al PVI

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x), \quad x(0) = x_0$$

en torno a los puntos críticos.

Existen 3 categorías de puntos críticos. Decimos que un punto crítico c es:

- **estable** si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

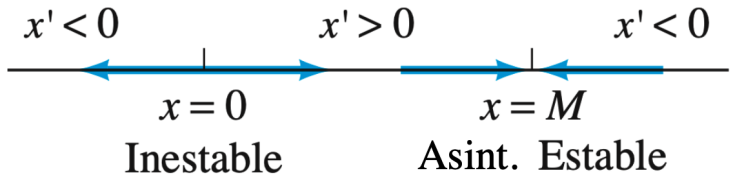
  $$|x_0 - c| < \delta \quad \text{implica} \quad |x(t) - c| < \epsilon, \ \forall t > t_0;$$

  donde $x(t)$ es solución del PVI: $x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0$.
- **asintóticamente estable** si existe $\delta > 0$ tal que

  $$|x_0 - c| < \delta \quad \text{implica} \quad \lim_{t \to \infty} |x(t) - c| = 0,$$

  donde $x(t)$ es solución del PVI: $x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0$.
- **inestable** en caso contrario.

Obs. La estabilidad asintótica e inestabilidad se ven claramente en el diagrama de fase:



EDO's de orden superior

(parte 1: ecuaciones lineales)

Recordemos que una EDO de orden $n \in \mathbb{N}$ es una igualdad de la forma

$$G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Decimos que es **lineal** (de orden n) si se puede escribir como:

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x)$$

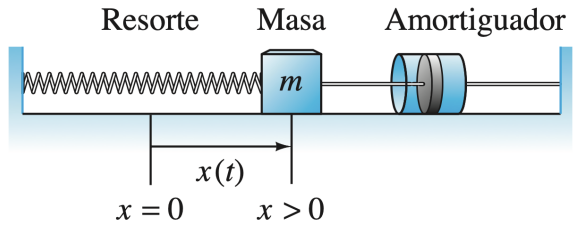
donde $P_0 \neq 0$.

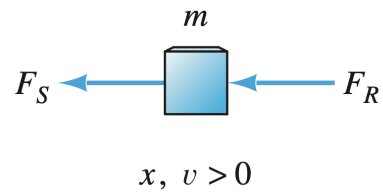
De manera equivalente (dividiendo por $P_0(x)$), podemos escribir

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)}$$

Motivación.

Consideremos un sistema mecánico compuesto por una masa, un resorte y un amortiguador.





m : masa	$x(t)$: desplazamiento horizontal con respecto a posición de equilibrio
F_S : fuerza ejercida por el resorte $F_S = -kx$ (con $k > 0$)	F_R : fuerza ejercida por el amortiguador $F_R = -cv = -c\dfrac{dx}{dt}$ (con $c > 0$)

La ley de Newton, $F = ma$, no dice que $x(t)$ satisface la EDO lineal de orden 2:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{(modelo de vibraciones libres)}$$

En presencia de otras fuerzas externas $F(t)$, la EDO es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad \text{(modelo de vibraciones forzadas)}$$

Para estudiar EDO's lineales de orden superior necesitamos algunos conceptos nuevos.

Veremos primero el caso de EDO's de 2do orden y luego generalizaremos los conceptos para EDOs de orden $n \geq 2$.

Una **EDO lineal de segundo orden** es de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Para encontrar soluciones a esta EDO debemos primero estudiar su **ecuación homogénea** asociada:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

La importancia de la ecuación (lineal) homogénea proviene de:

Teorema. [**Principio de superposición para ec's homogéneas**]
Si y_1 e y_2 son soluciones de la EDO lineal homogénea en un intervalo abierto $\mathcal{I}$, entonces toda combinación lineal

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (\text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

es también una solución de la ecuación en $\mathcal{I}$.

Ejemplo. Consideremos la EDO: $y'' + y = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se verifica que

$$y_1(x) = \cos(x), \quad y_2(x) = \text{sen}(x)$$

son soluciones de la ecuación en todo $\mathbb{R}$.

Por el principio de superposición, para toda las constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \text{sen}(x)$$

es también solución en todo $\mathbb{R}$.

¿ Es $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \text{sen}(x)$ la solución general?

$\longrightarrow$ Si, pero lo explicaremos más adelante.

Un buen modelo matemático basado en EDO's de orden superior requiere que seamos capaces de resolver de manera única un *problema de valor inicial* (PVI)

Teorema. [**Existencia y unicidad para EDO's lineales**]
Sean p, q, f funciones continuas en un intervalo abierto $\mathcal{I}$ tal que $a \in \mathcal{I}$. Para cualquier $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, el PVI de 2do orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1,$$

tiene solución única en todo el intervalo $\mathcal{I}$.

Obs. Existen infinitas soluciones tal que $y(a) = b_0$;
existen infinitas soluciones tal que $y'(a) = b_1$;
pero existe una única solución tal que $y(a) = b_0,\ y'(a) = b_1$.

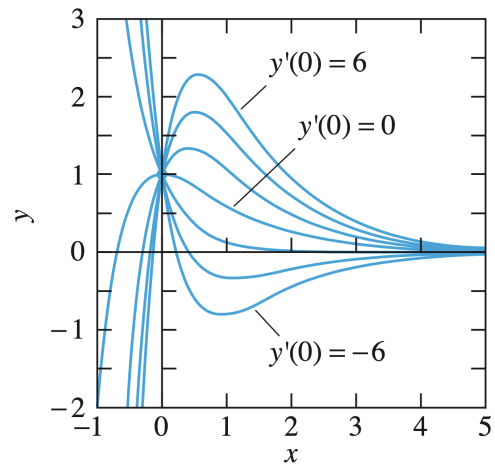


FIGURA 3.1.6. Soluciones de $y'' + 3y' + 2y = 0$ con el mismo valor inicial $y(0) = 1$, pero con pendientes iniciales diferentes.

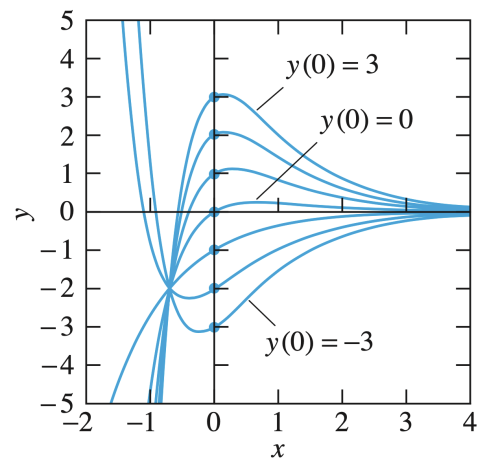


FIGURA 3.1.7. Soluciones de $y'' + 3y' + 2y = 0$ con la misma pendiente inicial $y'(0) = 1$, pero con diferentes valores iniciales.

Ejemplo. Volvamos a la EDO: $y'' + y = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pero consideremos condiciones iniciales

$$y(0) = b_0, \quad y'(0) = b_1.$$

Sabemos que:

- $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \text{sen}(x)$ es solución para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
- el PVI tiene solución única en todo $\mathbb{R}$.

Solución (única) al PVI: $y(x) = b_0 \cos(x) + b_1 \text{sen}(x)$.

¿Cual es la solución al PVI

$$y'' + y = 0, \quad y(\pi/4) = 1, \quad y'(\pi/4) = 0 \ ?$$

Debemos resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} y(\pi/4) = & c_1 \cos(\pi/4) + c_2 \text{sen}(\pi/4) & = 1 \\ y'(\pi/4) = & -c_1 \text{sen}(\pi/4) + c_1 \cos(\pi/4) & = 0 \end{cases}$$

Podemos generalizar lo hecho anteriormente.

Queremos resolver el PVI

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1,$$

Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ dos soluciones de la EDO homogénea (no necesariamente del PVI)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Buscamos una solución de la forma $y = c_1y_1 + c_2y_2$ tal que

$$\begin{cases} y(a) = & c_1y_1(a) + c_2y_2(a) & = b_0 \\ y'(a) = & c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a) & = b_1 \end{cases}$$

¿ Cuándo podemos resolver el sistema de ecuaciones?
(es decir, encontrar c_1, c_2)

$\longrightarrow$ Para eso necesitamos que y_1, y_2 sean **linealmente independientes**