Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2026

MAT1640 - Ecuaciones diferenciales ordinarias
Interrogación 1

1. **(6 puntos)** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}\,y = y^3.$$

(a) Sin resolver, ¿puede afirmar que existe una solución única para el siguiente problema de valor inicial?

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}\,y = y^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Justifique su respuesta.

(b) Resuelva explícitamente la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}\,y = y^3$.

Solución.

(a) Sea $f(x,y) = -\frac{2}{x}y + y^3$. Para aplicar el Teorema de Picard-Lindelöf en una vecindad del punto inicial $(0,1)$, se requiere que las funciones f y $\partial_y f$ sean continuas en un región abierta que contenga $(0,1)$. Sin embargo, f no está ni definida en $x = 0$. Por lo tanto, no podemos afirmar la existencia ni la unicidad usando este teorema. arg
Sin embargo, el PVI no tiene solución en cualquier intervalo que contenga 0 porque toda solución debe satisface la ecuación en $x = 0$ que es una singularidad.

(b) Se trata de una **ecuación de Bernoulli** ($n = 3$). Consideramos la sustitución $v = y^{-2}$ tal que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2y^{-3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, se obtiene una nueva ecuación dada por

$$v' - \frac{4}{x}v = -2,$$

que es lineal y cuyo factor integrante $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{4}{x}\mathrm{d}x} = x^{-4}$. Entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-4}v) = -2x^{-4},$$

y la solución es

$$v(x) = \frac{2}{3}x + Cx^4.$$

Por lo tanto,

$$y^{-2}(x) = \frac{2}{3}x + Cx^4,$$

y luego

$$|y(x)| = \frac{1}{\sqrt{|\frac{2}{3}x + Cx^4|}} \quad \text{para} \quad \frac{2}{3}x + Cx^4 > 0.$$

Podemos distinguir los casos $C = 0, C < 0, C > 0$.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(1 pt)** por responder que el PVI no tiene solución en ningún intervalo que contenga 0.
- Asignar **(0.5 pt)** por justificar correctamente.

(b)
- Asignar **(1.5 pts)** por considerar la sustitución $v = y^{-2}$ y obtener la nueva ecuación diferencial (o una equivalente que permite resolver la ecuación diferencial). Descontar **(0.5 pt)** por cometer a lo más un error.
- Asignar **(2 pts)** por resolver correctamente esta nueva ecuación diferencial que es lineal.
- Descontar **(0.5 pt)** por cometer a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pt)** por volver a la variable inicial y.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar la solución general.

2. **(6 puntos)** Considera el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y - xy' = a(1 + x^2 y'), \\ y(1) = 2a. \end{cases},$$

donde a es un parámetro real tal que $a \neq 0$.

(a) Resuelva el PVI en función de a y determine el intervalo maximal de definición de la solución.

(b) Para $a = 1$, dibuje el campo direccional de la ecuación diferencial y trace la solución encontrada en este caso.

(c) ¿Qué puede decir sobre la solución si $a = -1$? Analice el campo direccional correspondiente.

Solución.

(a) Sea $a \in \mathbb{R}^*$. Reescribimos la ecuación diferencial de la forma siguiente

$$y' = \frac{y - a}{x(1 + ax)},$$

y notemos que la solución singular $y(x) \equiv a$ de esta ecuación no cumple la condición inicial y por lo tanto no es solución de del PVI. Sea $y(x) \neq a$ y resolvemos la ecuación por separación de variables

$$\frac{\mathrm{d}y}{y - a} = \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + ax)},$$

y usando descomposición en fracciones parciales $\dfrac{1}{x(1+ax)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{1+ax}$, obtenemos

$$\ln|y - a| = \ln|x| - \ln|1 + ax| + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$y(x) = a + \frac{Kx}{1 + ax},$$

y por la condición inicial $y(1) = 2a$ determinamos K tal que

$$y(1) = a + \frac{K}{1 + a} = 2a,$$

o sea $K = a(1 + a)$ y por lo tanto la solución del PVI está dada por

$$y(x) = a + \frac{a(1 + a)\, x}{1 + ax},$$

que está definida para $x \neq -\frac{1}{a}$. Sin embargo, debemos considerar que el intervalo maximal

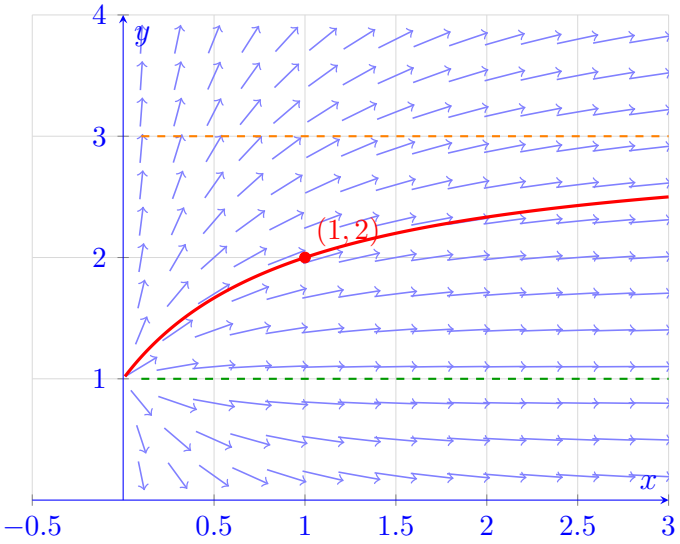
Como la condición inicial es $y(1) = 2a$ entonces

- Si $a > 0$ entonces $-\frac{1}{a} < 0$ y en este caso el intervalo maximal es $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$.

- Si $a < 0$, tenemos dos subcasos
  - Si $-\frac{1}{a} > 1$ entonces $-1 < a < 0$ y el intrevalo maximal es $I = (-\infty, -\frac{1}{a})$.
  - Si $-\frac{1}{a} < 1$ entonces $a < -1$ y el intrevalo maximal es $I = (-\frac{1}{a}, +\infty)$.

(b) **Campo direccional para $a = 1$.** La solución es $y(x) = 1 + \dfrac{2x}{1+x}$, definida en $(-1, +\infty)$. La isoclina $y' = 0$ corresponde a $y = 1$. La solución inicia desde $y(1) = 2$, es creciente con asíntota $y \to 3$ cuando $x \to +\infty$ y asíntota vertical en $x = -1$.

Campo direccional de $y' = \dfrac{y-1}{x(1+x)}$ con $a = 1$



(c) Si $a = -1$ entonces $K = 0$ y $y(x) \equiv -1$. Sin embargo, esta solución constante no satisface la condición $y(1) = 2a = -2$ o sea el PVI no tiene solución en este caso. Lo que no contradice el Teorema de existencia y unicidad porque la función $f(x, y) = \frac{y+1}{x(1-x)}$ no está definida en $x = 1$. El campo direccional no esta definido en el punto $(1, -2)$ y no existe ninguna solución que pase por este punto. Lo que confirma que el PVI no tiene solución.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(0.5 pt)** por descartar la solución singular $y(x) \equiv 0$ que no satisface en este caso la condición inicial.
- Asignar **(1 pt)** por resolver correctamente la ecuación diferencial por separación de variables. Descontar **(0.5 pt)** por cometer a lo más un error.

- Asignar **(0.5 pt)** por calcular la constante K en función de a y usando la condición inicial.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar explícitamente y determinado la familia de soluciones.
- Asignar **(1.5 pts)** por determinar correctamente el intervalo maximal de definición de la solución en cada caso. Asigna (0.5 pt) por cada caso según $a > 0$, $-1 < a < 0$ y $a < -1$.

(b)
- Asignar **(1 pt)** por dibujar el campo direccional para $a = 1$ usando las pendientes y las isoclinas.
- Asignar **(0.5 pt)** por trazar la solución considerando la condición inicial.

(c) Asignar **(0.5 pt)** por indicar que el campo direccional no esta definido en el caso $a = -1$.

3. (a) **(3 puntos)** Resuelva el siguiente problema de valor inicial usando una reducción de orden adecuada

$$\begin{cases} y\,y'' = (y')^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

(b) **(3 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$2xy\ln y\mathrm{d}x + \Big(x^2 + x^2\ln y - y\Big)\mathrm{d}y = 0, \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Solución.

(a) Sea $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'$, $y'' = p\,\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ la nueva variable que permite reducir la ecuación inicial a la nueva ecuación $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2$ y luego

$$y\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p.$$

Es una ecuación separable tal que

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

o sea

$$p = Ay.$$

Como $y(0) = 1$y $y'(0) = 2$ entonces $A = 2$ y luego $y' = 2y$ o sea la solución del PVI inicialmente considerado es

$$y(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

(b) Sea $x > 0$. Escribimos la ecuación de la forma

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

donde

$$M(x,y) = 2xy\ln y, \quad N(x,y) = x^2 + x^2\ln y - y,$$

son funciones continuas en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ y tales que

$$\partial_y M(x,y) = 2x + 2x\ln y = \partial_x N(x,y).$$

Entonces la ecuación diferencial es exacta y por lo tanto existe una función F definida en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ tal que

$$\begin{cases} \partial_x F = M \\ \partial_y F = N. \end{cases}$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x, obtenemos

$$F(x,y) = \int 2xy\ln y \mathrm{d}x + h(y) = x^2 y\ln y + h(y).$$

Derivando esta expresión de F y usando la segunda ecuación, obtenemos

$$\partial_y F(x,y) = x^2(\ln y + 1) + h'(y) = x^2 + x^2\ln y - y,$$

o sea $h'(y) = -y$ y así $h(y) = -\frac{1}{2}y^2$. Por lo tanto,

$$F(x,y) = x^2 y\ln y - \frac{1}{2}y^2,$$

y la solución está dada implícitamente por la familia

$$x^2 y\ln y - \frac{1}{2}y^2 = c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(1 pt)** por identificar la sustitución $p = y'$ y reducir correctamente el orden de la ecuación.
- Asignar **(1 pt)** por resolver correctamente la nueva ecuación diferencial en p por separación de variables. Descontar **(0.5 pt)** por cometer a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pt)** por usar las condiciones iniciales y determinar correctamente la constante $A = 2$.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar la solución del PVI inicial.

(b) Resolver la ecuación diferencial $2xy\ln y\mathrm{d}x + \Big(x^2 + x^2\ln y - y\Big)\mathrm{d}y = 0$ para $x > 0$.
- Asignar **(1 pt)** por demostrar que es una ecuación exacta.
- Asignar **(0.25 pt)** por indicar que es exacta en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.
- Asignar **(1.5 pts)** por determina la función F. Si se comete a lo más un error en el cálculo o en la integración que permite obtener la función F, asignar **(1pt)**.
- Asignar **(0.25 pt)** por expresar la familia de soluciones $x^2\ln y - \frac{1}{2}y^2 = c$ para $c\in\mathbb{R}$.

4. **(6 puntos) Propagación de un rumor.** En una red social con N usuarios, se modela la propagación de un rumor mediante la ecuación autónoma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = \beta\mathbf{R}(N-\mathbf{R}) - \gamma\mathbf{R}^2,$$

donde $\mathbf{R}(t)$ es el número de usuarios que conocen el rumor en el instante t, $\beta > 0$ es la tasa de propagación del rumor y $\gamma > 0$ es la tasa de olvido.

(a) Encuentre los puntos de equilibrio en función de los parámetros β, γ y N. Clasifíquelos como estables o inestable.

(b) Para $N = 10000$, $\beta = \gamma = 0{,}001$, resuelva la ecuación por separación de variables e interprete el comportamiento cuando $t \to +\infty$.

Solución.

(a) Se trata de una ecuación autónoma logística. Sea

$$f(\mathbf{R}) = \beta\mathbf{R}(N-\mathbf{R}) - \gamma\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\Big(\beta N - (\beta+\gamma)\mathbf{R}\Big).$$

Los puntos de equilibrio son las soluciones de $f(\mathbf{R}) = 0$ tales que

$$\mathbf{R}_1 = 0, \qquad \mathbf{R}_2 = \frac{\beta N}{\beta+\gamma}.$$

Tenemos $f'(\mathbf{R}) = \beta N - 2(\beta+\gamma)\mathbf{R}$ y para clasificar los puntos de equilibrio, notemos que

- $f'(\mathbf{R}_1) = f'(0) = \beta N > 0$ y en este caso $\mathbf{R}_1 = 0$ es **inestable**.
- $f'(\mathbf{R}_2) = \beta N - 2(\beta+\gamma)\cdot\dfrac{\beta N}{\beta+\gamma} = \beta N - 2\beta N = -\beta N < 0$ y en este caso $\mathbf{R}_2 = \frac{\beta N}{\beta+\gamma}$ es **estable**.

(b) Sean $N = 10000 = 10^4$ y $\beta = \gamma = 0{,}001$. En particular $\mathbf{R_2} = \frac{\beta \mathbf{N}}{\beta+\gamma} = \mathbf{5000}$. Resolvemos la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = 10^{-3}\mathbf{R}(10^4-\mathbf{R}) - 10^{-3}\mathbf{R} = 10^{-3}\mathbf{R}(10^4-2\mathbf{R}),$$

por separación de variables tal que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathbf{R}(10^4-2\mathbf{R})} = 10^{-3}\mathrm{d}t,$$

y como

$$\frac{1}{\mathbf{R}(10^4-2\mathbf{R})} = \frac{1}{10^4}\Big(\frac{1}{\mathbf{R}} + \frac{2}{10^4-2\mathbf{R}}\Big),$$

entonces

$$\ln\left|\frac{\mathbf{R}}{10^4-2\mathbf{R}}\right| = 10t + C.$$

Luego

$$\mathbf{R}(t) = \frac{10000}{2 + K\mathrm{e}^{-10t}}, \quad \text{con} \quad K = \frac{10^4 - 2\mathbf{R}(0)}{\mathbf{R}(0)}.$$

Si $t \to +\infty$ entonces $\mathbf{R}(t) \to 5000 = \mathbf{R}_2$. Entonces el rumor se estabiliza en la mitad de la red independientemente de $\mathbf{R}(0) \in (0, 10^4)$.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(1 pt)** por determinar correctamente los dos puntos de equilibrio R_1 y R_2.
- Asignar **(1 pt)** por clasificar correctamente R_1 como inestable.
- Asignar **(1 pt)** por clasificar correctamente R_2 como estable.

(b)
- Asignar **(0.25 pt)** por determinar la ecuación diferencial con los valores indicados.
- Asignar **(1.25 pts)** por resolver la ecuación diferencial: separación de variable (0.25 pt), descomposición en fracciones simples (0.25 pt), integral (0.5 pt), determinando la constante K (0.25 pt).
- Descontar **(0.5 pt)** por cometer a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pt)** por obtener la expresión explicita de la solución.
- Asignar **(0.5 pt)** por concluir el comportamiento límite.
- Asignar **(0.5 pt)** por interpretar que el rumor se estabiliza en la mitad.