Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2023

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Interrogación 2

1. Considere el siguiente problema

$$\frac{dx}{dt} = (x^2 - 2x + 1 - k)(1 - x)$$

(a) Si $k \geq 0$, determine los puntos críticos de la ecuación. Clasifique los puntos críticos en estable o inestable.

(b) Si $k < 0$, determine los puntos críticos de la ecuación. Clasifique los puntos críticos en estable o inestable.

Solución.

(a) Podemos observar que

$$(x^2 - 2x + 1 - k)(1 - x) = \big((x-1)^2 - k\big)(1 - x)$$

- Si $k = 0$ entonces hay un único punto crítico: $x = 1$. En tal caso la expresión queda dada por $-(x-1)^3$. Haciendo una tabla de signos tendremos que

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$-(x-1)^3$	$+$	$-$

A partir de la tabla se deduce que $x = 1$ es un punto crítico estable.

- Si $k > 0$ entonces hay tres único punto crítico: $x = 1$ y $x = 1 \pm \sqrt{k}$. En tal caso la expresión queda dada por $(x - (1 - \sqrt{k}))(1 - x)(x - (1 + \sqrt{k}))$. Haciendo una tabla de signos tendremos que

	$(-\infty, 1 - \sqrt{k})$	$(1 - \sqrt{k}, 1)$	$(1, 1 + \sqrt{k})$	$(1 + \sqrt{k}, \infty)$
$x - (1 - \sqrt{k})$	$-$	$+$	$+$	$+$
$1 - x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x - (1 - \sqrt{k})$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\big((x-1)^2 - k\big)(x-1)$	$+$	$-$	$+$	$-$

A partir de la tabla se deduce que $x = 1 - \sqrt{k}$ y $1 + \sqrt{k}$ son puntos crítico estable, mientras que $x = 1$ es un punto crítico inestable.

(b) Si $k < 0$ entonces $(x-1)^2 - k > 0$ y por tanto la expresión tiene un único punto crítico $x = 1$. Haciendo una tabla de signos tendremos

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$\big((x-1)^2 - k\big)(1 - x)$	$+$	$-$

A partir de la tabla se deduce que $x = 1$ es un punto crítico estable.

Evaluación.

- $k = 0$
- Asignar (**1 ptos**) por determinar que $x = 1$ es la única raíz cuando $k = 0$.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar, justificadamente, que $x = 1$ es un punto crítico estable. Si solo menciona que el punto crítico es estable y no hay alguna justificación que valide su afirmación, asignar (**0.25 ptos**).
- $k > 0$
- Asignar (**1 ptos**) por determinar que $x = 1 + \sqrt{k}$ y $x = 1 - \sqrt{k}$ son raíces cuando $k > 0$. Se asigna (**0.5 ptos**) si solo determina una de las raíces.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar, justificadamente, que $x = 1$ es un punto crítico inestable. Si solo menciona que el punto crítico es inestable y no hay alguna justificación que valide su afirmación, asignar (**0.25 ptos**).
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar, justificadamente, que $x = 1 + \sqrt{k}$ es un punto crítico estable. Si solo menciona que el punto crítico es estable y no hay alguna justificación que valide su afirmación, asignar (**0.25 ptos**).
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar, justificadamente, que $x = 1 - \sqrt{k}$ es un punto crítico estable. Si solo menciona que el punto crítico es estable y no hay alguna justificación que valide su afirmación, asignar (**0.25 ptos**).
- $k < 0$
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar que $x = 1$ es una raíz cuando $k < 0$.
- Asignar (**1 ptos**) por decir o evidenciar que $(x-1)^2 - k$ no admite raíces reales.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar, justificadamente, que $x = 1$ es un punto crítico estable. Si solo menciona que el punto crítico es estable y no hay alguna justificación que valide su afirmación, asignar (**0.25 ptos**).

2. Determine la solución general de la ecuación

$$y''' - 2y'' = e^{ax} + 1$$

siendo a un número real.

IMPORTANTE. Puede usar el método de coeficientes indeterminados o el método de aniquiladores.

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea es: $r^3 - 2r^2 = 0$ que tiene por raíces a $r = 2$ de multiplicidad 1 y $r = 0$ de multiplicidad 2. De ello se desprende que la solución homogénea está dada por

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}$$

Método de coeficientes indeterminados.

Si $a = 2$ el método de coeficientes indeterminados nos dice que la solución particular es de la forma $x_p(x) = Axe^{2x} + Bx^2$. Remplazando esta solución en la ecuación tendremos:

$$4Ae^{2x} - 4B = e^{2x} + 1$$

por lo que $A = 1/4$ y $B = -1/4$.

Si $a \neq 2$ el método de coeficientes indeterminados nos dice que la solución particular es de la forma $x_p(x) = Ae^{ax} + Bx^2$. Remplazando esta solución en la ecuación tendremos:

$$(a-2)a^2 Ae^{2x} - 4B = e^{ax} + 1$$

por lo que $A = 1/\big((a-2)a^2\big)$ y $B = -1/4$.

Método de aniquiladores.

El operador que aniquila $e^{ax} + 1$ es $D(D - a)$, siendo D el operador derivada.

Si $a = 2$ la ecuación diferencial queda dada por

$$D^3(D-2)^2 y = 0$$

que tiene solución

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C + De^{2x} + Exe^{2x} = \underbrace{(Bx + C + De^{2x})}_{homogenea} + \underbrace{(Ax^2 + Exe^{2x})}_{particular}$$

Remplazando la solución particular en la ecuación original tendremos que

$$4Ee^{2x} - 4A = e^{2x} + 1$$

por lo que $A = -1/4$ y $E = 1/4$.

Si $a \neq 2$ la ecuación diferencial queda dada por

$$D^3(D-2)(D-a)y = 0$$

que tiene solución

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C + De^{2x} + Ee^{ax} = \underbrace{(Bx + C + De^x)}_{homogenea} + \underbrace{(Ax^2 + Ee^{ax})}_{particular}$$

Remplazando la solución particular en la ecuación original tendremos que

$$(a-2)a^2Ee^{2x} - 4A = e^{ax} + 1$$

por lo que $A = -1/4$ y $E = 1/\big((a-2)a^2\big)$.

De lo anterior, se tendrá que la solución general está dada por

Si $a = 2$,

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + \frac{xe^{2x}}{4} - \frac{x^2}{4}$$

Si $a \neq 2$,

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + \frac{e^{ax}}{(a-2)a^2} - \frac{x^2}{4}$$

Evaluación.

- Asignar (**0.5 ptos**) por escribir la ecuación caracteristica asociada al sistema homogéneo.
- Asignar (**0.5 ptos**) por evidenciar que 1 es solución homogénea. Esto puede ser de forma expícita o implícita en la solución homogénea.
- Asignar (**0.5 ptos**) por evidenciar que x es solución homogénea. Esto puede ser de forma expícita o implícita en la solución homogénea.
- Asignar (**0.5 ptos**) por evidenciar que e^2 es solución homogénea. Esto puede ser de forma expícita o implícita en la solución homogénea.
- $a = 2$
- Asignar (**0.5 ptos**) por identificar que Axe^{2x} es parte de la solución particular.
- Asignar (**0.5 ptos**) por identificar que Bx^2 es parte de la solución particular.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar que $A = 1/4$.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar que $B = -1/4$.
- $a \neq 2$
- Asignar (**0.5 ptos**) por identificar que Ae^{2x} es parte de la solución particular.
- Asignar (**0.5 ptos**) por identificar que Bx^2 es parte de la solución particular.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar que $A = 1/((a-2)a^2)$.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar que $B = -1/4$. Si esto ya fue determinado anteriormente, asignar este puntaje aunque no se haya vuelto a hacer los cálculos.

3. Considere el problema lineal

$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln(x)) \tag{1}$$

en el intervalo $(0, \infty)$. Sea $y_1(x) = \cos(\ln(x))$ una solución del problema homogéneo asociado

a) Encuentre una solución y_2 sobre $(0, \infty)$ que sea l.i. con y_1. Usando el Wronskiano, justifique la independencia lineal de y_1 e y_2 sobre $(0, \infty)$.

b) Determine la solución general de la ecuación (1).

Solución. Observemos primero que el problema es equivalente a resolver

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{\sec(\ln(x))}{x^2}.$$

a) Sabemos que una segunda solución puede obtenerse calculando

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \cos(\ln(x)) \int \frac{e^{-\int x^{-1}dx}}{\cos^2(\ln(x))}dx \\ &= \cos(\ln(x)) \int \frac{\sec^2(\ln(x))}{x}dx \\ &= \cos(\ln(x)) \tan(\ln(x)) \\ &= \sin(\ln(x)). \end{aligned}$$

Observamos ahora que

$$W = \begin{vmatrix} \cos(\ln(x)) & \sin(\ln(x)) \\ -\sin(\ln(x))x^{-1} & \cos(\ln(x))x^{-1} \end{vmatrix} = x^{-1}\left(\cos^2(\ln(x)) + \sin^2(\ln(x))\right) = x^{-1}$$

es estrictamente positivo en $(0, \infty)$, por lo que se verifica la independencia lineal de las soluciones y_1 e y_2 en este intervalo.

b) Para encontrar la solución del problema buscamos una solución particular de la forma $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. Sabemos que entonces

$$u_1' = -\frac{y_2 f}{W} = -\frac{\tan(\ln(x))}{x} \Rightarrow u_1 = -\ln|\sec(\ln(x))|$$

y

$$u_2' = \frac{y_1 f}{W} = \frac{1}{x} \Rightarrow u_2 = \ln(x)$$

Luego, una solución particular es

$$y_p = -\cos(\ln(x)) \ln|\sec(\ln(x))| + \sin(\ln(x)) \ln(x)$$

y entonces la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos(\ln(x)) + c_2 \sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)) \ln|\sec(\ln(x))| + \sin(\ln(x)) \ln(x).$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por determinar correctamente y_2, con una técnica correcta, una función y_2. Si eligió una técnica correcta pero equivocó en el cálculo de y_2, asignar (**0.5 ptos**)
- Asignar (**1 ptos**) por calcular el wronskiano, siempre y cuando haya calculado correctamente y_2. Si calculó de forma incorrecta y_2, pero con esta función calcula correctamente el wronskiano, asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1ptos**) por justificar por qué las soluciones son l.i. siempre y cuando se hayan calculado correctamente y_2 y el wronskiano.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular correctamente u_2.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular correctamente u_1. Si el estudiante calculó mal y_2 pero con esa función logra calcular alguna función u_1 correctamente, asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por determinar la solución particular siempre y cuando haya calculado corretamente y_2, u_1 y u_2. Si calculó u_1 y u_2 correctamente habiendo calculado mal y_2, asignar (**0.5 ptos**).

4. Un cuerpo de masa $9kg$ se une al extremo libre de un resorte y es puesto en movimiento con posición inicial $x(0) = 0{,}1m$ y velocidad inicial $v(0) = -0{,}4m/s$.

   a) Sabiendo que al aplicar una fuerza de $28{,}8N$ en el resorte (sin el cuerpo de masa $9\,kg$), éste se estira $0{,}2m$, justifique por qué el valor de la constante k del resorte es de $144N/m$.

   b) Sabiendo que la constante del resorte es de $144N/m$, determine una fórmula para la posición de la masa en la forma $x(t) = C\cos(w_0 t - \alpha)$. Además determine su amplitud, frecuencia angular, periodo, frecuencia de oscilación.

   c) Sabiendo que la constante del resorte es de $144N/m$, ¿cuánto tiempo tarda en lograr el máximo desplazamiento?

Solución.

a) La fuerza que ejerce el resorte al comprimirse deber ser igual, en magnitud, a la fuerza que se ejerce sobre él. De este modo:

$$28{,}8 = k(0,2) \implies k = 144N/m$$

b) La ecuación para la posición de la masa es:

$$9x'' + 144x = 0 \implies x'' + 16x = 0$$

cuya ecuación característica es $r^2 + 16 = 0 \implies r = \pm 4i$. Por lo tanto:

$$x(t) = Acos(4t) + Bsen(4t)$$

La velocidad de la masa está dada por:

$$v(t) = -4A\sin(4t) + 4B\cos(4t)$$

Utilizando las condiciones iniciales:

$$0{,}1 = x(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A \implies \boxed{A = 0{,}1}$$

$$-0{,}4 = v(0) = -4A\sin(0) + 4B\cos(0) = 4B \implies \boxed{B = -0{,}1}$$

De esta forma:

$$\boxed{x(t) = 0{,}1\cos(4t) - 0{,}1\sin(4t)}$$

$$\boxed{v(t) = -0{,}4\cos(4t) - 0{,}4\sin(4t)}$$

Considerando lo anterior, entonces:

$$C = \sqrt{(0{,}1)^2 + (-0{,}1)^2} = \sqrt{1/100 + 1/100} \implies \boxed{C = \frac{\sqrt{2}}{10}}$$

Como $\cos(\alpha) = A/C = \sqrt{2}/2 > 0$ y $\sin(\alpha) = -\sqrt{2}/2 < 0$, entonces α se encuentra en el cuarto cuadrante. En efecto:

$$\alpha = 2\pi + \arctan(-1) = 2\pi - \pi/4 \implies \boxed{\alpha = \frac{7\pi}{4}}$$

Entonces la posición del cuerpo en el tiempo es:

$$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{2}}{10} cos\left(4t - \frac{7\pi}{4}\right)}$$

Por lo tanto,

1) Amplitud:

$$\boxed{C = \frac{\sqrt{2}}{10} m}$$

2) Frecuencia angular:

$$\boxed{w_0 = 4rad/s}$$

3) Periódo:

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{4} \implies \boxed{T = \frac{\pi}{2} s}$$

4) Frecuencia de oscilación:

$$f = \frac{1}{T} \implies \boxed{f = \frac{2}{\pi} Hz}$$

c) El tiempo cuando alcanza el máximo desplazamiento en términos genéricos es cuando:

$$v(t) = 0 \implies v(t) = w_0 C \sin(w_0 t - \alpha) = 0 \implies \boxed{t = \frac{\alpha}{w_0}}$$

que también se conoce como tiempo de retardo. Por tanto:

$$\boxed{t = \frac{7\pi}{16} s}$$

Evaluación. No se asignará puntaje por determinar soluciones a la edo por inspección. El α no es único, por lo que es posible encontrar infinitas soluciones de la forma $C\cos(\omega_0 - \alpha)$ las cuales todas son correctas. Todas ellas tendrán el puntaje correspondiente si se obtienen mediante la resolución de la ecuación diferencial respectiva.

- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar, justificadamente, el valor de k.
- Asignar (**0.5 ptos**) por establecer la ecuación de movimiento para la masa: $9x'' + 144x = 0$ o una equivalente.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar la ecuación caracteristica de la ecuación homogénea: $r^2 + 16 = 0$ o una equivalente.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar a $x_1(t) = \cos(4t)$ entre las soluciones del sistema. Si el estudiante determino una ecuación diferencial diferente pero la solución obtenida es del tipo $\cos(nt)$, para algún número real $n \neq 4$, asignar (**0.25 ptos**).
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar a $x_2(t) = \sin(4t)$ entre las soluciones del sistema. Si el estudiante determino una ecuación diferencial diferente pero la solución obtenida es del tipo $\sin(nt)$, para algún número real $n \neq 4$, asignar (**0.25 ptos**).
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar por determinar la constante que acompaña a $\cos(4t)$. Si el estudiante obtiene una solucón general del tipo $A\cos(nt) + B\sin(nt)$, con $n \neq 4$ real, asignar (**0.25 ptos**) por determinar el valor de A.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar por determinar la constante que acompaña a $\sin(4t)$. Si el estudiante obtiene una solucón general del tipo $A\cos(nt) + B\sin(nt)$, con $n \neq 4$ real, asignar (**0.25 ptos**) por determinar el valor de B.
- Asignar (**0.5 ptos**) por expresar la solución general en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$. Si el estudiante obtiene una solucón general del tipo $A\cos(nt) + B\sin(nt)$, con $n \neq 4$ real, asignar (**0.25 ptos**) por expresar la solución general en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$.
- Asignar (**0.25 ptos**) por determinar la amplitud. Esto solo se asignará se ha obtenido la solución general correcta, escrita en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$.
- Asignar (**0.25 ptos**) por determinar la frecuencia angular. Esto solo se asignará se ha obtenido la solución general correcta, escrita en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$.
- Asignar (**0.25 ptos**) por determinar la periodo. Esto solo se asignará se ha obtenido la solución general correcta, escrita en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$.
- Asignar (**0.25 ptos**) por determinar la frecuencia de oscilación. Esto solo se asignará se ha obtenido la solución general correcta, escrita en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar la velocidad de la masa. Si el estudiante obtiene una solucón general del tipo $A\cos(nt) + B\sin(nt)$, con $n \neq 2$ real, asignar (**0.25 ptos**) por determinar la velocidad de la masa.

- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar el instante de tiempo en que la masa logra desplazamiento máximo. Si el estudiante obtiene una solucón general del tipo $A\cos(nt) + B\sin(nt)$, con $n \neq 4$ real, asignar (**0.25 ptos**) por determinar el instante de tiempo en que la masa logra desplazamiento máximo. Si el estudiante obtiene t de mínimo desplazamiento $t = 3\pi/16$ asignar (**0.25 ptos**).

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos