Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
30 de agosto de 2013

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales - Interrogación N° 1 - Solución

1. Determine una solución de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{1-e^{-t}} - 2te^{-t} = 0 \qquad (t > 0)$$

que permanece acotada para todo $t > 0$.

Solución: La ecuación corresponde a una lineal de la forma $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + P(t)y = Q(t)$ con $P(t) = 1/(1-e^{-t})$ y $Q(t) = 2te^{-t}$. Al multiplicar por el factor integrante $m(t) = \exp(\int P(t)\mathrm{d}t) = \exp(\ln(e^t - 1)) = e^t - 1$, obtenemos $\frac{\mathrm{d}my}{\mathrm{d}t} = mQ$ y integrando

$$y(t) = \frac{1}{m(t)}\int m(t)Q(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{e^t-1}\int (e^t-1)2te^{-t}\mathrm{d}t = \frac{t^2 + 2(t+1)e^{-t} + C}{e^t - 1}.$$

El cero del denominador para $t \to 0$ se compensa en el numerador si y solo si $C = -2$, y como la solución tiende ademas a cero para $t \to +\infty$, se concluye que $y(t) = \frac{t^2+2(t+1)e^{-t}-2}{e^t-1}$ es (la única) solución acotada para todo $t > 0$.

2. Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(1+\cos(2x))}{2y\cos x - \sin(2x)}, \qquad y(0) = 1$$

explícitamente.

Solución: Al escribir la ecuación en la forma $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$ con $M = y(1+\cos(2x))$ y $N = \sin(2x) - 2y\cos(x)$, vemos que $M_y = 1 + \cos(2x) \neq N_x = 2\cos(2x) + 2y\sin x$, asi la ecuación no es exacta. Sin embargo

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - \cos(2x) - 2y\sin(x)}{\sin(2x) - 2y\cos(x)} = \frac{2\sin(x)(\sin(x)-y)}{2\cos(x)(\sin(x)-y)} = \tan(x),$$

asi (multiples de) $m(x) = \exp(\int \tan(x)\mathrm{d}x) = \exp(-\ln|\cos(x)|) = \pm 1/\cos(x)$ sirven como factor integrante. En particular, dividiendo la ecuación por $2\cos(x)$ la convierte en la ecuación exacta

$$y\cos(x)\mathrm{d}x + (\sin(x) - y)\mathrm{d}y = 0.$$

Como la solución del sistema $F_x = y\cos x$, $F_y = \sin(x) - y$ es de la forma $F = y\sin(x) - y^2/2 + C$, vemos que la solución de la ecuación diferencial es dada implicitamente por

$$y\sin(x) - y^2/2 + C = 0.$$

La condición inicial demanda que $C = 1/2$ y luego de despejar y de la relación cuadrática se concluye que

$$y(x) = \sin(x) + \sqrt{1 + \sin^2(x)}.$$

3. Determine la solución general de las siguientes dos ecuaciones:

   a)
   $$(xy + x^2 + y^2)\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y = 0 \qquad (x > 0)$$

   b)
   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy(x^2y^2 - 1) \qquad (x > 0,\, y > 0)$$

   Solución:

   a) La ecuación es equivalente a la ecuación homogénea $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x} + 1$. Al substituir $y(x) = xv(x)$ obtenemos la ecuación separable $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 + v^2$, asi

   $$\int \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \arctan(v) = \ln(x) + C.$$

   Por lo tanto $y(x) = x\tan(\ln(x) + C)$.

   b) La ecuación es del tipo Bernoulli: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x^3y^3$. La sustitución $v = 1/y^2$ produce la ecuación lineal $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2xv = -2x^3$, cuya solución general es $v(x) = Ce^{x^2} + x^2 + 1$, asi $y(x) = (Ce^{x^2} + x^2 + 1)^{-1/2}$ (con $C \geq 0$).

4. Un estanque de 300 litros contiene 200 litros de agua salada con una concentración de sal de 0,05 gramos por litro. A tiempo $t = 0$ se abren dos llaves: por una llave sale el agua del estanque con un flujo de 0,5 litro por segundo. Por la otra llave se inyecta agua salada con una concentración de sal de 0,1 gramos por litro y un flujo de 1,0 litros por segundo. Suponiendo que al revolver el agua en el estanque se forma una mezcla homogénea a todo tiempo, determine la concentración de sal en el agua del estanque al momento de que este se empieza a rebalsar.

   Solución: Sea $v(t)$ el volumen de agua en el estanque y $x(t)$ la cuantidad de gramos de sal en el agua del estanque como función del tiempo. Entonces $v'(t) = 1{,}0 - 0{,}5 = 0{,}5$ con $v(0) = 200$, asi
   $$v(t) = 200 + 0{,}5t.$$
   Por otro lado $x'(t) = 0{,}1 \cdot 1{,}0 - \frac{x(t)}{v(t)} \cdot 0{,}5 = 0{,}1 - \frac{x(t)}{400+t}$ con $x(0) = 0{,}05 \cdot 200 = 10$ gramos de sal. Al resolver la ecuación lineal para $x(t)$ obtenemos:

   $$x(t) = \frac{4000 + 40t + t^2/20}{400 + t}.$$

   El estanque empieza a rebalsar cuando $v(t) = 200 + 0{,}5t = 300$, es decir a $t = 200$ segundos. En aquel momento el agua contiene $x(200) \approx 23{,}3$ gramos de sal. La concentración de sal es entonces en aquel momento $x(200)/v(200) \approx 23{,}3/300 \approx 0{,}078$ gramos por litro.