Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Examen – MAT 1640
el 6 de diciembre de 2013
PAUTA

Problema 1. La dinámica de la población $P = P(t)$ de una especie de pez se describe por

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P(\ell - P) - h, \\ P(0) = P_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $t > 0$ es el tiempo, $\ell > 0$ es la población de equilibrio que el medio ambiente puede sostener, $h > 0$ es la tasa constante de pesca y $P_0 > 0$ es la población inicial.
(i) Encuentre el mínimo $h_0 > 0$ tal que $h > h_0$ implica que para cualquier P_0 la solución de (1) es decreciente.
(ii) Para $h \in (0, h_0)$ encuentre $P_- > 0$ y $P_+ > P_-$ tales que la solución de (1) es creciente si y sólo si $P_0 \in (P_-, P_+)$.
Solución: (i) La solución de (1) es decreciente para todo P_0 si y sólo si

$$P(\ell - P) - h < 0$$

para todo P, que es equivalente a $\ell^2 - 4h < 0$. Por lo tanto, $h_0 = \frac{\ell^2}{4}$.
(ii) Si $h \in (0, h_0)$, es decir $\ell^2 - 4h > 0$ la ecuación

$$P(\ell - P) - h = 0$$

tiene dos soluciones

$$P_- := \frac{1}{2}\left(\ell - \sqrt{\ell^2 - 4h}\right), \quad P_+ := \frac{1}{2}\left(\ell + \sqrt{\ell^2 - 4h}\right)$$

tales que $0 < P_- < P_+$. Los puntos P_- y P_+ son puntos de equilibrio para (1), P_- es inestable, P_+ es estable. Por lo tanto si $P_0 \in (P_-, P_+)$, la solución de (1) es creciente, si $P_0 \in (0, P_-)$ o $P_0 > P_+$ la solución de (1) es decreciente, y si $P_0 = P_+$ ó $P_0 = P_-$ la solución de (1) es identicamente constante.

Problema 2. (i) Resuelva el problema

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2t) + 2 + te^{2t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -2. \end{cases} \tag{2}$$

(ii) Encuentre criterio sobre los parámetros reales b, c para que cada solución y de la ecuación

$$y'' + by' + cy = 0 \tag{3}$$

sea acotada en $\mathbb{R}$.
Solución: (i) Existen al menos tres métodos adecuados para resolver el problema:
a)*Método de coeficientes indeterminados.*
La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea

$$y'' + 4y = 0 \tag{4}$$

es $\lambda^2 + 4 = 0$, sus soluciones son $-2i$ y $2i$. Por la tanto la solucuón general de (4) es

$$y_h(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y'' + 4y = \cos(2t) + 2 + te^{2t} \tag{5}$$

en la forma

$$y_p(t) = t(A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)) + C + (Dt + E)e^{2t}. \tag{6}$$

Reemplazando (6) en (5) y utilizando la independecia lineal de las funciones $\cos(2t)$, $\operatorname{sen}(2t)$, 1, te^{2t} y e^{2t}, obtenemos

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{8}, \quad E = -\frac{1}{16},$$

es decir

$$y_p(t) = \frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}(2t-1)e^{2t}.$$

Por lo tanto, la solución general de (5) es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1\cos(2t) + c_2\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}(2t-1)e^{2t}.$$

Satifaciendo los datos iniciales en (2), obtenemos $c_1 = -\frac{7}{16}$, $c_2 = -1$, es decir la solución de (2) es

$$y(t) = -\frac{7}{16}\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}(2t-1)e^{2t}. \tag{7}$$

b) *Método de variación de constantes.*
Del mismo modo como en el método anterior encontramos que la solucuón general de (4) es

$$y_h(t) = k_1\cos(2t) + k_2\operatorname{sen}(2t)$$

dende k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. Esta vez estamos buscando una solución particular de (5) en la forma

$$\tilde{y}_p(t) = u_1(t)\cos(2t) + u_2(t)\operatorname{sen}(2t) \tag{8}$$

donde las funciones u_1 y u_2 satisfacen el sistema

$$\begin{cases} u_1' \cos(2t) + u_2' \operatorname{sen}(2t) = 0, \\ 2(-u_1' \operatorname{sen}(2t) + u_2' \cos(2t)) = \cos(2t) + 2 + te^{2t}. \end{cases}$$

Resolviendo e integrando de 0 a t, obtenemos

$$u_1(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}(2s)(\cos(2s) + 2 + se^{2s})ds,$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2s)(\cos(2s) + 2 + se^{2s})ds.$$

Calculando las integrales y reemplazando en (8), obtenemos

$$\tilde{y}_p(t) = -\frac{7}{16}\cos(2t) + \frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}(2t-1)e^{2t}.$$

Notemos que, por construcción, $\tilde{y}_p(0) = \tilde{y}_p'(0) = 0$. La solución general de (5) es

$$y(t) = k_1\cos(2t) + k_2\operatorname{sen}(2t) + \tilde{y}_p(t) =$$

$$k_1\cos(2t) + k_2\operatorname{sen}(2t) - \frac{7}{16}\cos(2t) + \frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}(2t-1)e^{2t}.$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. Satisfaciendo las condicioones iniciales en (2), obtenemos $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, y llegamos de nuevo a (7).

c) *Método de transformada de Laplace.*

Sea Y la transformada de Laplace de la solución de (2), es decir $Y = \mathcal{L}(y)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación de (2), obtenemos

$$(s^2+4)Y(s) + 2 = \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s} + \frac{1}{(s-2)^2},$$

es decir

$$Y(s) = -\frac{2}{s^2+4} + \frac{s}{(s^2+4)^2} + \frac{2}{s(s^2+4)} + \frac{1}{(s-2)^2(s^2+4)}.$$

Por lo tanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{s(s^2+4)} + \frac{1}{(s-2)^2(s^2+4)}\right)(t). \quad (9)$$

Tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)(t) = \frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t). \quad (10)$$

Aplicando fracciones parciales, obtenemos

$$-\frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{s(s^2+4)} + \frac{1}{(s-2)^2(s^2+4)} =$$

$$-\frac{7}{16}\frac{s}{s^2+4}-\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{2s}+\frac{1}{8(s-2)^2}-\frac{1}{16(s-2)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{2}{s^2+4}+\frac{2}{s(s^2+4)}+\frac{1}{(s-2)^2(s^2+4)}\right)(t)=$$

$$-\frac{7}{16}\cos(2t)-\operatorname{sen}(2t)+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}(2t-1)e^{2t}. \tag{11}$$

Combinando (9), (10) y (11), llegamos de nuevo a (7).
(ii) Supungamos que $b^2-4c>0$. Entonces la solución general de (3) es

$$y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$$

donde $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-b\pm\sqrt{b^2-4c})$ y c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Al menos uno de los dos números λ_1 y λ_2 es distinto de cero. Si $\lambda_1\neq 0$, elegimos, por ejemplo, $c_1=1$, $c_2=0$, y obtenemes solución no acotada en $\mathbb{R}$. Si que $\lambda_2\neq 0$, elegimos, por ejemplo, $c_2=1$, $c_1=0$, y obtenemes solución no acotada en $\mathbb{R}$. Entonces, debe ser $b^2-4c\leq 0$. Supongamos que $b^2-4c=0$. Entonces la solución general de (3) es

$$y(t)=c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t}$$

donde $\lambda=-\frac{b}{2}$ y c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Si $\lambda\neq 0$, elegimos, por ejemplo, $c_1=1$, $c_2=0$, y obtenemes solución no acotada en $\mathbb{R}$. Si $\lambda=0$, elegimos, por ejemplo, $c_2=1$, $c_1=0$, y obtenemes solución no acotada en $\mathbb{R}$. Entonces, debe ser $b^2-4c<0$. En este caso la solución general de (3) es

$$y(t)=e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t)+c_2\operatorname{sen}(\beta t)) \tag{12}$$

donde $\alpha=-\frac{b}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}$ y c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Si $c_1^2+c_2^2>0$, la función en (12) es acotada en $\mathbb{R}$ si y sólo si $\alpha=0$ es decir si y sólo si $b=0$.
Como resultado el criterio que cada solución de (3) es acotada en $\mathbb{R}$ es $b^2-4c<0$, $b=0$, o en forma equivalente $b=0$, $c>0$.

Problema 3. (i) Sea

$$A:=\begin{pmatrix}2&-4\\1&6\end{pmatrix}.$$

Encuentre la matriz exponencial e^{tA}, $t\in\mathbb{R}$.
(ii) Resuelva el problema

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x-4y+4e^{4t},\\ \frac{dy}{dt}=x+6y-2e^{4t},\\ x(0)=-2,\quad y(0)=1.\end{cases} \tag{13}$$

Solución: (i) La matriz A tiene valor propio 4 de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geomtérica 1 con vector propio $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y vector propio generalizado $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir

$$A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}, \quad (A - 4I)\mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

Entonces

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} 2e^{4t} & (2t-1)e^{4t} \\ -e^{4t} & -te^{4t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental para el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Por lo tanto

$$e^{tA} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{4t} & -4te^{4t} \\ te^{4t} & (1+2t)e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Observación: Hay otras maneras correctas de obtener la matriz fundamental.
(ii) Por la fórmula de Duhamel tenemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 4e^{4s} \\ -2e^{4s} \end{pmatrix} ds + e^{tA} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{4t}(2t-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Observación: Hay otras maneras correctas de resolver el problema (13).

Problema 4. (i) Encuentre los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + xy. \end{cases} \tag{14}$$

Utilizando el método de linealización, clasifíquelos, si es posible, como estables o inestables.
(ii) Verifique que el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x^2 - y^2, \end{cases} \tag{15}$$

es hamiltoniano y encuentre una función de Hamilton (constante de movimiento). Encuentre además sus puntos de equilibrio y decida si son estables o inestables.
Solución: (i) Los puntos de equilibrio del sistema (14) satisfacen

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 0, \\ -y + xy = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto los puntos de equilibrio son $(0,0)$, $(1,\sqrt{2})$ y $(1,-\sqrt{2})$. Calculemos la matriz jacobiana $J(x,y)$ del campo vectorial $(2x-y^2, -y+xy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tenemos

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

Sean $\Delta(x,y) := \det J(x,y)$, $\tau(x,y) := \operatorname{Tr} J(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Analicemos el punto $(0,0)$. Tenemos $\Delta(0,0) = -2 < 0$. Por lo tanto la matriz $J(0,0)$ tiene dos valores propios reales no nulos de signos opuestos. Por lo tanto $(0,0)$ es punto de equilibrio inestable.
Analicemos los puntos $(1, \pm\sqrt{2})$. Tenemos $\Delta(1, \pm\sqrt{2}) = 4 > 0 < 0$, $\tau(1, \pm\sqrt{2}) = 2 > 0$ y $\tau(1, \pm\sqrt{2})^2 - 4\Delta(1, \pm\sqrt{2}) = -12 < 0$. Por lo tanto la matriz $J(1, \pm\sqrt{2})$ tiene dos valores propios complejos conjugados con parte real $\tau/2 = 1 > 0$. Por lo tanto $(0, \pm\sqrt{2})$ son puntos de equilibrio inestable.
(ii) Tenemos

$$-\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = -2y = \frac{\partial}{\partial y}(1 - x^2 - y^2),$$

es decir el sistema (15) es hamiltaniano. La función hamiltoniana H debe satisfacer

$$\begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial y} = 2xy, \\ \frac{\partial H}{\partial x} = 1 - x^2 - y^2, \end{cases}$$

Integrando y elegiendo, por ejemplo, la constante de integración igual a cero, obtenemos

$$H(x,y) = x - \frac{x^3}{3} - xy^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Luego, los puntos de equilibrio de (15) satisfacen

$$\begin{cases} 2xy = 0, \\ 1 - x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos cuatro puntos de equilibrio: $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. Calculemos la matriz hessiana $\mathcal{H}(x,y)$ de la función H. Tenemos

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como $\det \mathcal{H}(0, \pm 1) = -4 < 0$, la matriz simétrica $\mathcal{H}(0, \pm 1)$ tiene dos valores propoios de signos opuestos y los puntos de equilibrio $(0, \pm 1)$ son inestables.
Como $\det \mathcal{H}(\pm 1, 0) = 4 > 0$, la matriz simétrica $\mathcal{H}(\pm 1, 0)$ tiene valores propios del mismo signo y los puntos de equilibrio $(\pm 1; 0)$ son estables.