2. Utilice el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea

$$x'' + 3x' + 2x = 4e^t.$$

primero hay que encontrar la solución general de la homogénea: $r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$

$x_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ $\quad x_1 = e^{-t}$ $\quad x_2 = e^{-2t}$ ① La solución particular será de la forma

$x_p = u_1 x_1 + u_2 x_2$ donde u_1' y u_2' satisfacen el sistema $\left.\begin{array}{l} u_1' e^{-t} + u_2' e^{-2t} = 0 \\ -u_1' e^{-t} - 2u_2' e^{-2t} = 4e^t \end{array}\right\}$ ②

Sumando ambas ecuaciones obtenemos $-u_2' e^{-2t} = 4e^t \Rightarrow u_2' = -4e^{3t}$ reemplazando esto en la 1ª ec

obtenemos $u_1' e^{-t} = 4e^t \Rightarrow u_1' = 4e^{2t}$ ③ Integrando obtenemos $u_1 = 4\int e^{2t}dt = 2e^{2t}$ y $u_2 = -4\int e^{3t}dt$

$= -\frac{4}{3} e^{3t}$. de modo que $x_p = 2e^{2t}e^{-t} - \frac{4}{3} e^{3t} \cdot e^{-2t} = 2e^t - \frac{4}{3} e^t = \frac{6-4}{3} e^t = \frac{2}{3} e^t$ ④

no es modo comprobar: $x_p'' + 3x_p' + 2x_p = \frac{2}{3} e^t + 2e^t + \frac{4}{3} e^t = 4e^t$ ✓

① 0,3 pts por la sol de la homogénea

② 0,3 pts por armar el sistema
③ 0,3 pts por resolver el sistema
④ 0,3 pts por integrar y encontrar la sol particular

⟶ si usan la fórmula con determinantes en lugar de armar el sistema
0,6 puntos por escribir la fórmula correcta

4. Encuentre un sistema de primer orden equivalente al sistema de segundo orden

$$\begin{cases} x'' - 5x + 4y = 0 \\ y'' + 4x - 5y = 0. \end{cases}$$

← 0,4 pts por definir los nuevos variables

Definimos los variables $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $y_1 = y$, $y_2 = y'$. En estos nuevos variables el sistema se escribe como $\begin{cases} x_2' - 5x_1 + 4y_1 = 0 \\ y_2' + 4x_1 - 5y_1 = 0 \end{cases}$ y tenemos que agregar las ecuaciones $\begin{cases} x_2 = x_1' \\ y_2 = y_1' \end{cases}$ para llegar al sistema

$$\begin{cases} x_2' = 5x_1 - 4y_1 \\ x_1' = x_2 \\ y_2' = -4x_1 + 5y_1 \\ y_1' = y_2 \end{cases}$$

← 0,4 pts por escribir las ecuaciones en los nuevos variables

↑ 0,4 puntos por llegar al sistema de 4×4

5. Encuentre la solución al sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

que satisface las condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 4$.

haciendo $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenemos $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$

buscamos los valores propios:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 \Rightarrow 1-\lambda = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm 2i \quad \text{0,3 por valores propios}$$

usamos el valor propio $\lambda = 1+2i$ y buscamos un vector propio asociado:

$$\begin{pmatrix} 1-1-2i & -2 \\ 2 & 1-1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2i\,a - 2b = 0 \\ 2a - 2ib = 0 \end{cases}$$

haciendo $b = 1$ y reemplazando en la 2ª ecuación obtenemos $a = i$

obteniendo el vector propio $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ llegamos entonces a la solución compleja $\vec{x} = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,3 por vector propio

$$= e^t (\cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t)) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t \operatorname{sen}(2t) + i\, e^t \cos(2t) \\ e^t \cos(2t) + i\, e^t \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

con parte real $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -e^t \operatorname{sen}(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$ parte imaginaria $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} e^t \cos(2t) \\ e^t \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}$ 0,3 por sol general

y sol general $c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2$. Reemplazamos la condición inicial para obtener $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow c_1 = 4, c_2 = 0$ y la sol buscada es $x_1 = -4e^t \operatorname{sen}(2t)$ $x_2 = 4e^t \cos(2t)$

0,3 por sol particular