Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
13 de enero de 2015

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
Solución Interrogación N° 1

1. *a*) Encuentre un factor integrante de la forma $\mu(y)$ para la E.D.O.

$$xy\,dx \;+\; (2x^2+3y^2-20)\,dy \;=\; 0$$

y úselo para resolver la ecuación

Respuesta: Si llamamos $M(x,y)=xy;\;\; N(x,y)=2x^2+3y^2-20,$ tenemos que

$$M_y(x,y) \;=\; x \;\neq\; N_x(x,y) \;=\; 4x \qquad \text{la ecuación no es exacta.}$$

Buscamos función $\mu(y)$ tal que $\mu(y)xydx+\mu(y)(2x^2+3y^2-20)dy \;=\; 0$ sea exacta. Para ello debe ocurrir que

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial}{\partial y}\,(\,xy\mu(y)\,) & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\,\mu(y)(2x^2+3y^2-20) \\
& \Updownarrow & \\
x\mu(y)+xy\mu'(y) & = & 4x\mu(y) \\
& \Updownarrow & \\
\dfrac{\mu'(y)}{\mu(y)} & = & \dfrac{3}{y} \\
& \Updownarrow & \\
\ln(\mu(y)) & = & \ln(y^3) \\
& \Updownarrow & \\
\mu(y) & = & y^3
\end{array}$$

Por tanto la ecuación $xy^4dx \;+\; (2x^2y^3+3y^5-20y^3)dy \;=\; 0$ es exacta.
Por tanto existe $f(x,y)$ tal que

$$f_x(x,y) \;=\; xy^4; \qquad f_y(x,y) \;=\; 2x^2y^3+3y^5-20y^3.$$

Integrando la primera respecto a x obtenemos $f \;=\; \dfrac{x^2y^4}{2}+\varphi(y)\,.$
Derivando con respecto a y y usando la segunda condición obtenemos $\varphi'(y) \;=\; 3y^5-20y^3.$
Po tanto

$$f(x,y) \;=\; \frac{x^2y^4}{2} \;+\; \frac{y^6}{2} \;-\; 5y^4 \quad \text{y así la solución de la ecuación es} \quad f(x,y) \;=\; C.$$

b) Encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2 \frac{dy}{dx} = xy + 3y^2 \quad (x > 0).$$

Solución : Escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3y^2}{x^2}$$

y notamos que el lado derecho (llamémoslo $f(x, y)$) es una función homogénea de grado cero. Luego, mediante la sustitución $u = y/x$ la ecuación se vuelve separable.

En efecto, mediante la susitución indicada, $y = xu$ y por tanto la ecuación se transforma en

$$u + xu' = u + 3u^2.$$

Separando variables e integrando,

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} &= 3u^2 \\ \frac{du}{u^2} &= 3 \frac{dx}{x} \quad \int \\ -\frac{1}{u} &= 3 \ln x + C \end{aligned}$$

y como $u = y/x$ obtenemos

$$y = -\frac{x}{3 \ln x + C} \quad \square$$

NOTA: La ecuación es también del tipo de Bernoulli y puede, por tanto, ser resuelta mediante el cambio de variables $u = y^{-1}$, el que la tranforma en una ecuación lineal.

2. Un cadáver fué hallado dentro de un cuarto que estaba a temperatura constante de 70°F. Al momento del descubrimiento la temperatura del cadáver era de 85°F y una hora después, una segunda medición mostró que la temperatura del cadáver era de 80°F. Suponiendo que en el momento de la muerte el cuerpo estaba a 98°F, determine cuántas horas pasaron antes de que el cadáver fuera encontrado (asumiendo que la temperatura del cadáver cambia con rapidez proporcional a la diferencia entre ella y la temperatura del cuarto).

Solución : Sea $x(t)$ la temperatura (en grados Farenheit) del cadáver t horas después del fallecimiento.

El P.V.I para esta función es $x'(t) = k(70 - x(t))$; $x(0) = 98$, para cierta constante de proporcionalidad k.

La ecuaciń es separable y su solución general es $x(t) = 70 - Ce^{-kt}$.

Usando la condición incial, $x(0) = 98$ obtenemos $C = -28$ y por tanto,

$$x(t) = 70 + 28e^{-kt}.$$

Sea T el tiempo transcurrido entre la muerte y el descubrimiento del cadáver. Los datos del problema nos dicen que

$$x(T) = 85 \quad \Rightarrow \quad 85 = 70 + 28e^{-kT} \quad \Rightarrow \quad 15 = 28e^{-kT} \qquad (1)$$

y que

$$x(T+1) = 80 \quad \Rightarrow \quad 80 = 70 + 28e^{-kT}e^{-k} \quad \Rightarrow \quad 10 = 28e^{-kT}e^{-k}$$

Sustituyendo en la última igualdad la condición (1) tenemos $e^{-k} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow k = -\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

Por lo tanto,

$$x(t) = 70 + 28e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)t}.$$

Reemplazando en (1) obtenemos

$$15 = 28e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{\ln(15/28)}{\ln(2/3)} \approx 1,6 \text{ horas.}$$

3. *a*) Indique si los siguientes Problemas de Valor Incial tienen solución o no y, de tenerla, indique cuántas soluciones hay. ¿Contradicen los resultados al Teorema de Existencia y Unicidad?

i) $(t-1)\,y'(t) \;=\; y(t); \qquad y(1) \;=\; 0.$

ii) $(t-1)\,y'(t) \;=\; y(t); \qquad y(1) \;=\; 1.$

Respuesta : La ecuación $(t-1)\,y'(t) \;=\; y(t)$ es de variables separables y por tanto su solución general se obtiene integrando:

$$\int \frac{dy}{y} \;=\; \int \frac{dt}{t-1} \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| \;=\; \ln K|t-1| \qquad \Rightarrow \qquad y \;=\; C(t-1).$$

- Para satisfacer la condición inicial $y(1) \;=\; 0$ debe cumplirse que $0 \;=\; C \times 0,$ lo cual ocurre para todo C (en otras palabras, para cualquier valor de C la función $y(t) \;=\; C(t-1)$ satisface $y(0) \;=\; 1$).

  Por tanto, el problema (a) tiene infinitas soluciones.

- Por otra parte, para satisfacer la condición inicial $y(1) \;=\; 1$ debe cumplirse que $1 \;=\; C \times 0,$ lo cual no se cumple para ningún valor de $C,$ de modo que el problema (b) no tiene ninguna solución.

Ahora bien, la ecuación es

$$y' \;=\; \frac{y}{t-1} \;=\; f(t,y)$$

y vemos que ni f ni $f_y \;=\; 1/(t-1)$ son continuas en ningún punto de la forma $(1,\, y_0),$ de modo que el T.E.U. no aplica cuando la condición incial es del tipo $y(1) \;=\; y_0$ y así los problemas (a) y (b) no tienen por qué tener soluciones únicas sin que ello implique contradecir el T.E.U.

b) Encuentre todos los puntos de equilibrio de la ecuación autónoma

$$\frac{dx}{dt} \;=\; (x^3 \;-\; x^2)\,\cos\,2x, \qquad \text{para} \quad -\,2 \le x \le 2$$

y clasifíquelos ¿Cuáles son atractores (sumideros) y cuáles repulsores (fuentes)?

Respuesta: Si $f(x) \;=\; (x^3 - x^2)\cos\,2x \;=\; x^2(x-1)\cos\,2x,$ los puntos de equilibrio son las ríces de $f(x)$ en el intervalo $-2 \le x \le 2,$ Esto es,

$$x \;=\; -\frac{\pi}{4}\,,\; 0,\; \frac{\pi}{4}\,,\; 1.$$

Como $f'(x) \;=\; (3x^2-1)\cos\,2x \;-\; 2(x^3-x)\,\text{sen}\,2x$ tenemos que

$$\text{en } -2 < x < -\frac{\pi}{4}\,, \quad f(x) > 0; \quad \text{en } -\frac{\pi}{4} < x < 0, \quad f(x) < 0; \quad \text{en } 0 < x < \frac{\pi}{4}\,, \quad f(x) < 0;$$

$$\text{en } \frac{\pi}{4} < x < 1\,, \quad f(x) > 0; \quad \text{en } 1 < x < 2, \quad f(x) < 0;$$

Por lo tanto, $x \;=\; -\,\dfrac{\pi}{4}$ y $x \;=\; 1$ son sumideros (atractores estables). $x \;=\; \dfrac{\pi}{4}$ es fuente (repulsor inestable) y $x = 0$ es tipo silla.

4. *a)* Verifique que las funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$ son linealmente independientes en cualquier intervalo. Escriba una ecuación diferencial del menor orden posible cuya solución general sea $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Respuesta: Debemos probar que el wornskiano, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo x real. Tenemos que

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(x+1) \end{vmatrix} = e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \ \forall x,$$

de modo que las funciones son l.i.

La E.D.O. de menor orden que tiene a dichas funciones como soluciones fundamentales es aquella cuyo polinomio característico es $p(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. esto es, la E.D.O.

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

b) Resuelva el Problema de Valores Inciales $y'' + y' + y = 0; \qquad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$

Respuesta: El polinomio caracterstico es $p(x) = x^2 + x + 1$, cuyas raíces son los complejos conjugados $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

Consecuentemente, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = e^{-x/2} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) \right).$$

Ahora, la condición $y(0) = 0$ implica que $C_1 = 0$ de modo que

$$y(x) = C_2 e^{-x/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{C_2}{2}\, e^{-x/2} \left(\sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) \right).$$

Usando ahora la segunda condición incial, $y'(0) = 1$, tenemos que $C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Por tanto, la solución del P.V.I. es

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-x/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right).$$