MAT1640, semestre 2021/2

Pauta Interrogación 2

Profesores Alejandro Ramirez & Christian Sadel

Problema 1, Versión 1:
Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = e^{3t}$$

Solución La ecuación se puede escribir en la forma

$$(D-1)^2 y = e^{3t}.$$

Luego tenemos que buscar las soluciones de

$$(D-3)(D-1)^2 y = 0.$$

Pero la solución general de esta ecuación es

$$c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{3t}.$$

Los primero dos términos corresponden a la solución general de la e versión homogénea de la ecuación original. Por esa razón buscamos una solución particular de la forma Ae^{3t}. Luego

$$9A - 6A + A = 1,$$

lo que implica $A = \frac{1}{4}$. Por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y_g(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{4} e^{3t} \quad \text{(6 pt)}$$

Problema 1, Versión 2:
Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = e^{4t}$$

Solución La ecuación se puede escribir en la forma

$$(D-1)^2 y = e^{4t}.$$

Luego tenemos que buscar las soluciones de

$$(D-4)(D-1)^2 y = 0.$$

Pero la solución general de esta ecuación es

$$c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{4t}.$$

Los primero dos términos corresponden a la solución general de la e versión homogénea de la ecuación original. Por esa razón buscamos una solución particular de la forma Ae^{4t}. Luego

$$16A - 8A + A = 1,$$

lo que implica $A = \frac{1}{9}$. Por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y_g(t) = c_1e^t + c_2te^t + \frac{1}{9}e^{4t} \quad \text{(6 pt)}.$$

Problema 2, Versión 1:

Para $y = y(t)$ con $t > 0$ sea dado la EDO

$$(\star) \qquad t^2\,y'' + 7t\,y' + 9y = 0$$

a) Verifiqué, que $y(t) = t^{-3}$ es una solución de $(\star)$.
b) Usando la solución dado en a), obtiene la solución general de $(\star)$.

Solución
a) $(t^{-3})' = -3t^{-4}$, $\qquad (t^{-3})'' = 12t^{-5}$. En $(\star)$

$$12t^2t^{-5} - 21t \cdot t^{-4} + 9t^{-3} = 0 \;\Rightarrow\; 0t^{-3} = 0$$

ok, tenemos solución. (1 pt)

b) Metodo 1: Variación constante:

$y(t) = u(t)t^{-3}$. En $(\star)$ se obtiene

$$t^2(u''t^{-3} - 6ut^{-4}) + 7t(u't^{-3}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'' + t^{-1}u' = 0 \quad \text{(1 pt)}$$

Factor integrante: $e^{\ln(t)} = t$ (1 pt).

$0 = tu'' + u' = (tu')' \quad \Leftrightarrow \quad u'(t) = C_1/t \quad \Leftrightarrow \quad u(t) = C_1\ln(t) + C_2$ (2 pt)

y por es

$$y(u) = u(t)t^{-3} = C_1t^{-3}\ln(t) + C_2t^{-3};. \quad \text{(1 pt)}$$

Metodo 2: Identidad de Abel:

$y_1 = t^{-3}$, Wronskiano $W' + 7t^{-1}W = 0$, factor integrante t^7 (0,5 pt),
solución: $W = Ct^{-7}$. (1 pt).

Podemos usar $C = 1$ para obtener alguna solución y_2 independiente de y_1.

$$t^{-7} = W = y_1y_2' - y_1'y_2 = t^{-3}y_2' + 3t^{-4}y_2$$
$$\Leftrightarrow \qquad y_2' + 3t^{-1}y_2 = t^{-4} \quad \text{(1 pt)}$$

Factor integrante t^3. (0,5 pt)

$$t^{-1} = t^3 y_2' + 3t^2 y_2 = (t^3 y_2)' \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = t^{-3}\ln(t) + ct^{-3} \quad \text{(1 pt)}$$

se puede usar $c = 0$. La solución general ce $(\star)$ es:

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 t^{-3} + c_2 t^{-3}\ln(t)\,. \quad \text{(1 pt)}$$

Problema 2, Versión 2:

Para $y = y(t)$ con $t > 0$ sea dado la EDO

$$(\star) \qquad t^2\, y'' \,+\, 5t\, y' \,+\, 4y \,=\, 0$$

a) Verifiqué, que $y(t) = t^{-2}$ es una solución de $(\star)$.
b) Usando la solución dado en a), obtiene la solución general de $(\star)$.

Solución
a) $(t^{-2})' = -2t^{-3}$, $\quad (t^{-2})'' = 6t^{-4}$. En $(\star)$

$$6t^2 t^{-4} - 10t \cdot t^{-3} + 4t^{-2} = 0 \;\Rightarrow\; 0t^{-2} = 0$$

ok, tenemos solución. (1 pt)

b) Metodo 1: Variación constante:

$y(t) = u(t)t^{-2}$. En $(\star)$ se obtiene

$$t^2(u''t^{-2} - 4u't^{-3}) + 5t(u't^{-2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'' + t^{-1}u' = 0 \quad \text{(1 pt)}$$

Factor integrante: $e^{\ln(t)} = t$ (1 pt).

$$0 = tu'' + u' = (tu')' \quad \Leftrightarrow \quad u'(t) = C_1/t \quad \Leftrightarrow \quad u(t) = C_1\ln(t) + C_2 \quad \text{(2 pt)}$$

y por es

$$y(u) = u(t)t^{-2} = C_1 t^{-2}\ln(t) + C_2 t^{-2};. \quad \text{(1 pt)}$$

Metodo 2: Identidad de Abel:

$y_1 = t^{-3}$, Wronskiano $W' + 5t^{-1}W = 0$, factor integrante t^5 (0,5 pt),
solución: $W = Ct^{-5}$. (1 pt).

Podemos usar $C = 1$ para obtener alguna solución y_2 independiente de y_1.

$$t^{-5} = W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = t^{-2} y_2' + 2t^{-3} y_2$$

$$\Leftrightarrow \qquad y_2' + 3t^{-1} y_2 = t^{-3} \quad \text{(1 pt)}$$

Factor integrante t^2. (0,5 pt)

$$t^{-1} = t^2 y_2' + 2t y_2 = (t^2 y_2)' \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = t^{-2}\ln(t) + ct^{-2} \quad \text{(1 pt)}$$

se puede usar $c = 0$. La solución general de $(\star)$ es:

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 t^{-2} + c_2 t^{-2}\ln(t)\,. \quad \text{(1 pt)}$$

Problema 3, Versión 1:
A un resorte colgado en el techo con constante de $k = 1,2\text{N/m}$ se pone una masa de $m = 300\text{g}$. En una eje vertical orientado hacia abajo se pone el punto $y = 0$ donde el sistema masa-resorte esta en equilibrio. A la masa al tiempo t se pone una fuerza externa de $0,3\sin(3t)$ N (t en segundos). Al tiempo $t = 0$, la masa sea en el lugar de equilibrio ($y = 0$) con velocidad 0.

Describe el movimiento vertical de la masa por una EDO.

¿Donde esta la masa después de 10 segundos, (cuantos metros arriba o abajo del punto de equilibrio)? y ¿cuál velocidad tiene?

Solución
Usamos tiempo t en segundos, y en metros, (y" en m/s^2) fuerzas en Newton. Fuerza de acceleración: $\text{N} = \text{kg}\,\text{m/s}^2$, así necesitamos la masa en kg. $m = 0,3$ kg. $my'' = -ky + f$, o $my'' + ky = f$. Asi, en unidades de Newton:

$$0,3y'' + 1,2y = 0,3\sin(3t)$$

cambiar masa correctamente (1 pt), obtener ecuación correcta: (0,5 pt.)

Ademas tenemos $y(0) = 0$, é, $y'(0) = 0$. (0,5 pt.) para usar condiciones correctos
Para solucionarlo, lo ponemos en forma normal:

$$y'' + 4y = \sin(3t)$$

Solucion de ecuacion homogenea $y_c = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$. (1 pt.) No aparece termino $\sin(3t)$.
Asi, se puede probar $Y(t) = c_3\cos(3t) + c_4\sin(3t)$ para la solución particular.

$$\sin(3t) = Y'' + 4Y = -5c_3\cos(3t) - 5c_4\sin(3t)$$

Asi, $c_3 = 0$, $c_4 = -\frac{1}{5}$, $Y(t) = -\frac{1}{5}\sin(3t)$ (1 pt.) y tenemos

$$y(t) = -\frac{1}{5}\sin(3t) + c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$$

$$0 = y(0) = c_1, \qquad 0 = y'(0) = -\frac{3}{5} + 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0,\ c_2 = \frac{3}{10}$$

y por eso

$$y(t) = -\frac{1}{5}\sin(3t) + \frac{3}{10}\sin(2t) \qquad \text{(1 pt.)}$$

$y(10) = -\frac{1}{5}\sin(30) + \frac{3}{10}\sin(20) \approx 0,47$;
$y'(10) = -\frac{3}{5}\cos(30) + \frac{3}{5}\cos(20) \approx 0,15$

Despues de 10 segundos, a masa esta aproximadamente 0,47 m = 47 cm abajo del punto de equilibrio y tiene velocidad de aproximadamente 0,15 m/s = 15 cm/s (1 pt.), tb. esta ok dejar las respuestas con formulas, pero debe tener la correcta unidad

Problema 3, Versión 2:
A un resorte colgado en el techo con constante de $k = 1,8\text{N/m}$ se pone una masa de $m = 200\text{g}$. En una eje vertical orientado hacia abajo se pone el punto $y = 0$ donde el sistema masa-resorte esta en equilibrio. A la masa al tiempo t se pone una fuerza externa de $0,2\sin(3t)$ N (t en segundos). Al tiempo $t = 0$, la masa sea en el lugar de equilibrio ($y = 0$) con velocidad 0.

Describe el movimiento vertical de la masa por una EDO.

¿Donde esta la masa después de 10 segundos, (cuantos metros arriba o abajo del punto de equilibrio)? y ¿cuál velocidad tiene?

Solución
Usamos tiempo t en segundos, y en metros, (y" en m/s^2) fuerzas en Newton. Fuerza de acceleración: $\text{N} = \text{kg}\,\text{m/s}^2$, así necesitamos la masa en kg. $m = 0,3$ kg. $my'' = -ky + f$, o $my'' + ky = f$. Asi, en unidades de Newton:

$$0,2y'' + 1,8y = 0,2\sin(2t)$$

cambiar masa correctamente (1 pt), obtener ecuación correcta: (0,5 pt.)

Ademas tenemos $y(0) = 0$, é, $y'(0) = 0$. (0,5 pt.) para usar condiciones correctos
Para solucionarlo, lo ponemos en forma normal:

$$y'' + 9y = \sin(2t)$$

Solucion de ecuacion homogenea $y_c = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)$. (1 pt.) No aparece termino $\sin(2t)$.
Asi, se puede probar $Y(t) = c_3\cos(2t) + c_4\sin(2t)$ para la solución particular.

$$\sin(2t) = Y'' + 9Y = 5c_3\cos(2t) + 5c_4\sin(2t)$$

Asi, $c_3 = 0$, $c_4 = \frac{1}{5}$, $Y(t) = \frac{1}{5}\sin(2t)$ (1 pt.) y tenemos

$$y(t) = \frac{1}{5}\sin(2t) + c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)$$

$$0 = y(0) = c_1, \qquad 0 = y'(0) = \frac{2}{5} + 3c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0,\ c_2 = -\frac{2}{15}$$

y por eso

$$y(t) = \frac{1}{5}\sin(2t) - \frac{2}{15}\sin(3t) \qquad \text{(1 pt.)}$$

$y(10) = \frac{1}{5}\sin(20) - \frac{2}{15}\sin(30) \approx 0,31$;
$y'(10) = \frac{2}{5}\cos(20) - \frac{2}{5}\cos(30) \approx 0,10$

Despues de 10 segundos, a masa esta aproximadamente 0,31 m = 31 cm abajo del punto de equilibrio y tiene velocidad de aproximadamente 0,10 m/s = 10 cm/s (1 pt.), tb. esta ok dejar las respuestas con formulas, pero debe tener la correcta unidad

Problema 4, Versión 1:
Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' + 4y = \frac{3}{\sin(t)}$$

Puede usar que

$$\int \frac{1}{\cos(t)} dt = \ln\left|\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right| + C$$
$$\int \frac{1}{\sin(t)} dt = -\ln\left|\frac{1+\cos(t)}{\sin(t)}\right| + C$$

Solución Hay dos soluciones de la versión homogénea de la ecuación:

$$y_1(t) = \cos(2t) \qquad y_2(t) = \sin(2t) \qquad \text{(1 pt)}$$

Por otra parte, el Wronskiano de estas soluciones es

$$W[y_1, y_2](t) = 2\cos^2(2t) + 2\sin^2(2t) = 2. \qquad \text{(1 pt)}$$

Luego, una solución particular de la ecuación es

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)\frac{3}{\sin(s)}}{2} ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)\frac{3}{\sin(s)}}{2} ds \\ &= -\cos(2t)\int_{t_0}^{t} \frac{3\sin(2s)}{2\sin(s)} ds + \sin(2t)\int_{t_0}^{t} \frac{3\cos(2s)}{2\sin(s)} ds. \qquad \text{(2 pt)} \end{aligned}$$

Pero

$$\int_{t_0}^{t} \frac{3\sin(2s)}{2\sin(s)} ds = \frac{3}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{2\sin(s)\cos(s)}{\sin(s)} ds = 3\int_{t_0}^{t} \cos(s) ds = 3\sin(t) + c$$

(de hecho $c = 3\sin(t_0)$ pero el parte $-cy_1(t)$ se absorba al parte de solución homogénea). Y

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} \frac{3\cos(2s)}{2\sin(s)} ds = \frac{3}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{1-2\sin^2(s)}{\sin(s)} ds = -3\int_{t_0}^{t} \sin(s) ds + \frac{3}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\sin(s)} ds \\ &= 3\cos(t) - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(t)}{\sin(t)}\right| + \tilde{c} \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ecuación es

$$\begin{aligned} y_g(t) =& c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) - 3\cos(2t)\sin(t) \\ &+ 3\sin(2t)\cos(t) - \frac{3}{2}\sin(2t)\ln\left|\frac{1+\cos(t)}{\sin(t)}\right|. \qquad \text{(2 pt)} \end{aligned}$$

Problema 4, Versión 2:
Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' + 4y = \frac{3}{\cos(t)}$$

Puede usar que

$$\int \frac{1}{\cos(t)} dt = \ln\left|\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right| + C$$
$$\int \frac{1}{\sin(t)} dt = -\ln\left|\frac{1+\cos(t)}{\sin(t)}\right| + C$$

Solución Hay dos soluciones de la versión homogénea de la ecuación:

$$y_1(t) = \cos(2t) \qquad y_2(t) = \sin(2t). \qquad \text{(1 pt)}$$

Por otra parte, el Wronskiano de estas soluciones es

$$W[y_1, y_2](t) = 2\cos^2(2t) + 2\sin^2(2t) = 2. \qquad \text{(1 pt)}$$

Luego, una solución particular de la ecuación es

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)\frac{3}{\cos(s)}}{2} ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)\frac{3}{\cos(s)}}{2} ds \\ &= -\cos(2t)\int_{t_0}^{t} \frac{3\sin(2s)}{2\cos(s)} ds + \sin(2t)\int_{t_0}^{t} \frac{3\cos(2s)}{2\cos(s)} ds. \qquad \text{(2 pt)} \end{aligned}$$

Pero

$$\int_{t_0}^{t} \frac{3\sin(2s)}{2\cos(s)} ds = \frac{3}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{2\sin(s)\cos(s)}{\cos(s)} ds = 3\int_{t_0}^{t} \sin(s) ds = -3\cos(t) + c$$

(de hecho $c = 3\cos(t_0)$ pero el parte $-cy_1(t)$ se absorba al parte de solución homogénea). Y

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} \frac{3\cos(2s)}{2\cos(s)} ds = \frac{3}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{2\cos^2(2) - 1}{\cos(s)} ds = 3\int_{t_0}^{t} \cos(s) ds - \frac{3}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\cos(s)} ds \\ &= 3\sin(t) - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right| + \tilde{c}\,. \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ecuación es

$$\begin{aligned} y_g(t) =& c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + 3\cos(2t)\cos(t) \\ &+ 3\sin(2t)\sin(t) - \frac{3}{2}\sin(2t)\ln\left|\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right|. \qquad \text{(2 pt)} \end{aligned}$$