MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 17)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Ejercicios de repaso para la I2

1. Encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = (2y - \pi)\cos(y)$$

y clasifiquelos como estables (sumidero), inestables (fuentes) o semiestables (nodos).

2. La reacción química $P + Q \to X$ involucra la interacción de dos tipos de moléculas, P y Q, generando la molécula X. Si $0 < p < q$ son las concentraciones iniciales de P y Q respectivamente, mientras $x(t)$ es la concentración de molécula X en el tiempo, la reacción química se modela mediante la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x), \quad x > 0$$

con $\alpha > 0$.

(a) Determine los puntos críticos y clasifíquelos.

(b) Si $x(0) = 0$, sin resolver la ecuación, determine el límite de $x(t)$ cuando $t \to \infty$. Luego, resuelva la ecuación y encuentre $x(t)$.

(c) Repita el mismo análisis pero suponiendo ahora que $p = q$.

Ejercicios de repaso para la I2

3. Considere las funciones $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$.

(a) Muestre que y_1, y_2 son linealmente independientes en $(-1, 1)$. Luego, muestre que $W(y_1, y_2) = 0$ en $x = 0$ ¿Qué puede concluir sobre la posibilidad de que y_1, y_2 sean soluciones a una ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$?

(b) Verifique que y_1, y_2 son soluciones a la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. Explique por que este resultado no contradice la parte anterior ni tampoco el teorema del wronskiano de soluciones.

4. Encuentre la solución general a la ecuación

$$(x-1)y'' - xy' + y = e^x(3-x), \quad x > 1,$$

si se sabe que $y_1(x) = e^x$ es una solución de la ecuación homogénea.

Ejercicios de repaso para la I2

5. Determine la solución general a las ecuaciónes

(a) $y'' + 4y = \cos^3(x)$

(b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\text{sen}(2t) + 4$

6. Se sabe que la posición de un sistema masa-resorte satisface el problema de valor inicial

$$\frac{3}{2}u'' + ku = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = v.$$

Si el periodo y la amplitud del movimiento resultante son respectivamente π y 3, determine los valores de k y v.