Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2025

Interrogación 3 MAT1640 – PAUTA

1. Una masa de $2kg$ se sujeta al extremo libre de un resorte con constante del resorte $32N/m$. Suponga el sistema no tiene amortiguación y que la masa inicia en $t = 0$ en reposo. Si una fuerza $f(t) = 8te^{-2t}$ se aplica al sistema, use transformada de Laplace para encontrar la posición $x(t)$ de la masa en función del tiempo. ¿Cúal es, aproximadamente, la amplitud de la vibración si t es muy grande?.

Una solución:

El PVI que modela el problema es

$$2x'' + 32x = 8te^{-2t} \quad , \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Aplicando Laplace obtenemos que

$$2s^2X + 32X = 8\frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow X = 4\frac{1}{(s+2)^2(s^2+16)}$$

Usando fracciones parciales se descubre que

$$X = \frac{1}{25}\left(-\frac{s+3}{s^2+16} + \frac{1}{s+2} + \frac{5}{(s+2)^2}\right)$$

es decir

$$X = \frac{1}{25}\left(-\frac{s}{s^2+16} - \frac{3}{4}\frac{4}{s^2+16} + \frac{1}{s+2} + 5\frac{1}{(s+2)^2}\right)$$

de modo que la solución es

$$x(t) = \frac{1}{25}\left(-\cos(4t) - \frac{3}{4}\operatorname{sen}(4t) + e^{-2t} + 5te^{-2t}\right).$$

Para responder la pregunta observamos que para t grande la exponencial es descartable (por ser decreciente), de modo que x es aproximadamente

$$\frac{1}{25}\left(-\cos(4t) - \frac{3}{4}\operatorname{sen}(4t)\right)$$

lo cual tiene una amplitud de vibración

$$A = \frac{1}{25}\sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{1}{20}.$$

Asignación de puntaje:

- Escribir PVI correcto: **1 punto**
- Aplicar Laplace en lado derecho: **1 punto**
- Aplicar Laplace en lado izquierdo: **0,5 puntos**

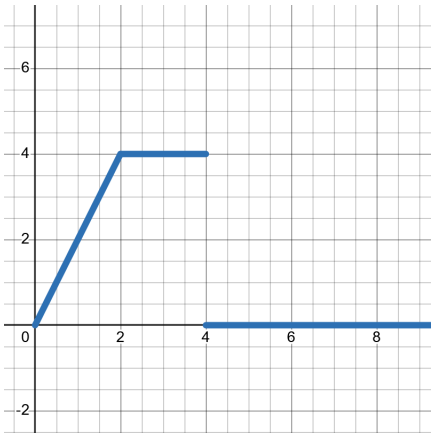
- Despejar X: **0,5 puntos**
- Realizar fracciones parciales correctamente: **1 punto**
- Determinar x: **1 punto**
- Descartar exponencial para aproximación: **0,5 puntos**
- Determinar amplitud aproximada: **0,5 puntos**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

2. Resuelva el PVI

$$y' + y = f(t) \quad , \quad y(0) = 4$$

donde $f(t)$ es dada por el siguiente gráfico:



Una solución: Observamos primero que f puede escribirse como

$$f(t) = \begin{cases} 2t & , t \leq 2 \\ 4 & , 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & , t > 4 \end{cases}$$

lo que a su vez puede expresarse como

$$f(t) = 2t(1 - U(t-2)) + 4(U(t-2) - U(t-4)) = 2t + (4-2t)U(t-2) - 4U(t-4).$$

Luego, aplicando Laplace,

$$sY - 4 + Y = \frac{2}{s^2} + e^{-2s}L(4 - 2(t+2)) - 4e^{-4s}\frac{1}{s} = \frac{2}{s^2} - 2e^{-2s}\frac{1}{s^2} - 4e^{-4s}\frac{1}{s}$$

de modo que

$$Y = 4\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s^2(s+1)} - 2e^{-2s}\frac{1}{s^2(s+1)} - 4e^{-4s}\frac{1}{s(s+1)}$$

o, usando fracciones parciales,

$$Y = 4\frac{1}{s+1} + 2\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right) - 2e^{-2s}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right) - 4e^{-4s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right).$$

Luego

$$y(t) = 4e^{-t} + 2\left(-1 + t + e^{-t}\right) - 2\left(-1 + (t-2) + e^{-(t-2)}\right)U(t-2) - 4\left(1 - e^{-(t-4)}\right)U(t-4).$$

Asignación de puntaje:

- Escribir correctamente f usando Heaviside: **1 punto**
- Transformada de f: **1,5 punto**
- Transformada del PVI: **0,5 puntos**

- Despejar Y: **0,5 puntos**
- Fracciones parciales: **1 punto**
- Encontrar y: **1,5 puntos**

Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

3. El PVI

$$x'' + kx = \delta_{t_0} \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 1$$

puede usarse para modelar un sistema masa-resorte sin amortiguación, con constante del resorte $k > 0$, que inicia en su posición de equilibrio con velocidad $1m/s$, y que recibe un golpe instantáneo en un tiempo $t_0 > 0$. Muestre que es posible elegir $t_0 > 0$ tal que el sistema quede permanentemente en reposo luego de recibir el golpe (es decir, tal que $x(t) = 0$ para $t > t_0$).

Una solución:

Usando Laplace

$$s^2X - 1 + kX = e^{-st_0}$$

de modo que

$$X = \frac{1}{s^2 + k} + \frac{1}{s^2 + k}e^{-st_0}$$

y entonces

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(\sqrt{k}t) + \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(\sqrt{k}(t - t_0))U(t - t_0).$$

Para responder la pregunta observamos que si $\sqrt{k}t_0$ es un múltiplo impar de π, por ejemplo si $t_0 = \pi/\sqrt{k}$, entonces

$$\operatorname{sen}(\sqrt{k}(t - t_0)) = \operatorname{sen}(\sqrt{k}t - \pi) = -\operatorname{sen}(\sqrt{k}t)$$

de modo que con una tal elección, para t mayor que t_0, tenemos

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(\sqrt{k}t) - \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(\sqrt{k}t) = 0.$$

Asignación de puntaje:

- Transformada de lado izquierdo: **1 punto**
- Transformada de Delta: **1 punto**
- Despejar X: **1 punto**
- Encontrar x: **1 punto**
- Identificar una elección de t_0 adecuada: **1 punto**
- Mostrar que el sistema queda en reposo: **1 punto**

Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

4. Suponga en un ecosistema dos poblaciones $x(t)$, $y(t)$ compiten por recursos, y que esta competición puede modelarse por medio del sistema

$$\begin{aligned} x' &= 0{,}4x(50 - x - 0{,}75y) \\ y' &= 0{,}1y(100 - y - 3x). \end{aligned}$$

Encuentre y clasifique los puntos críticos del sistema (en cuanto a tipo y estabilidad, si es posible). ¿Es más probable la coexistencia de las especies, o que alguna de las dos se extinga? Justifique.

Una solución:

De resolver el sistema

$$\begin{aligned} 0{,}4x(50 - x - 0{,}75y) &= 0 \\ 0{,}1y(100 - y - 3x) &= 0 \end{aligned}$$

se obtienen los punto críticos $(0, 0)$, $(0, 100)$, $(50, 0)$, $(20, 40)$. Para clasificarlos calculamos el Jacobiano

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 20 - 0{,}8x - 0{,}3y & -0{,}3x \\ -0{,}3y & 10 - 0{,}2y - 0{,}3x \end{bmatrix}.$$

Luego, tenemos

- $$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

  la cual es de valores propios distintos, reales, y positivos, de modo que $(0, 0)$ es tipo nodo inestable, e inestable.

- $$J(0, 100) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ -30 & -10 \end{bmatrix}$$

  la cual es de un solo valor propio, negativo, de modo que $(0, 100)$ puede ser nodo o espiral, pero asintóticamente estable.

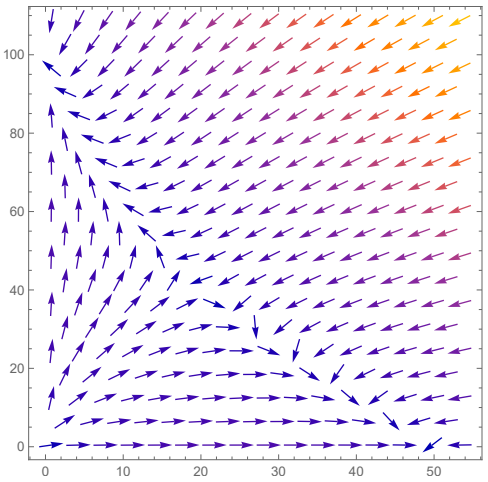
- $$J(50, 0) = \begin{bmatrix} -20 & -15 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

  la cual es de valores propios distintos, reales, y negativos, de modo que $(50, 0)$ es tipo nodo estable, asintóticamente estable.

- $$J(20, 40) = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}$$

  la cual es de traza $\tau = -12$ y determinante $\Delta = 32 - 72 = -40$, por lo que $(20, 40)$ es punto silla, inestable.

En consideración a que el único escenario de coexistencia asíntotica,$(x, y) = (20, 40)$, es inestable, y que los escenarios donde alguna población se extingue, $(x, y) = (0, 100)$ o $(x, y) = (50, 0)$ son atractores, deducimos que el escenario más probable es la extinción de alguna de las dos poblaciones.



Asignación de puntaje:

- Identificar puntos críticos: **1 punto**
- Calcular Jacobiano: **1 punto**
- Calcular Jacobiano en cada punto crítico: **1 punto**
- Deducir (al menos) estabilidad de cada punto crítico: **2 puntos**
- Argumentar que extinción de una población es el escenario más probable: **1 punto**

Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*