Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Facultad de Matemáticas, PUC

10 de Junio, 2013

Solución Interrogación 3

1. Considere el sistema $\vec{y}' = A\vec{y}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Encuentre tres soluciones l.i. del sistema.

   (b) Encuentre una base del conjunto de soluciones constantes del sistema.

   Solución.- El polinomio característico es

$$\text{Det}(A - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda + 1).$$

   El vector propio de -1 es $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para $\lambda = 0$ resulta que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Un vector en el núcleo de A^2 pero no en el núcleo de A es $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De aquí, $v_2 = Av_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Las soluciones l.i. del sistema son

$$y_1(t) = e^{-t}v_1, \;\; y_2(t) = v_2 \;\; \text{y} \;\; y_3(t) = tv_2 + v <_3 .$$

   Observamos que la solución y_2 es de hecho constante. Para que una solución cualquiera $y(t)$ sea constante se requiere que $Ay(t) = 0$, esto es, que $y(t)$ sea siempre un vector propio del valor propio 0. Queda claro de lo que hemos hecho que la base de este conjunto es $\{v_2\}$.

2. Considere la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -60 & 11 \end{pmatrix}.$$

   (a) Encuentre la solución del sistema $\vec{y}' = B\vec{y}$ que también satisface

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

   (b) Encuentre todas las condiciones iniciales para las cuales la solución correspondiente $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ del sistema, es tal que los límites $\lim_{t\to\infty} y_1(t)$ y $\lim_{t\to\infty} y_2(t)$ existen y son finitos.

Solución.- El polinomio característico es $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 1$. El vector propio de $\lambda = 1$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, mientras que para -1 tenemos el vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. De aquí vemos que la solución de la parte (a) es

$$e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Las ´unicas condiciones iniciales que satisfacen la condición de la parte (b) son

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

donde C es una constante arbitraria.

3. Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & c & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Compruebe que si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ es solución del sistema, entonces $\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ también lo es.

(b) Compruebe que si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ es solución del sistema con $x(0) = z(0)$, entonces $x(t) = z(t)$ para todo t.
Hint: Podría usar la parte a) y el teorema de unicidad.

Solución.- (a) Como $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ es solución del sistema, se tiene que

$$x' = ax + bz,$$

$$y' = bx + cy + az$$

y

$$z' = bx + az.$$

Esto claramente implica que $\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ es solución del sistema.

(b) Por la parte (a) sabemos que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ son dos soluciones del sistema que satisfacen $x(0) = z(0)$. Por el teorema de unicidad de soluciones necesariamente estas dos soluciones son iguales, lo que implica que $x(t) = z(t)$ para todo t.

4. Considere un sistema de dos ecuaciones lineales con coeficientes constantes $\vec{y}' = A\vec{y}$, que tiene como una de sus soluciones

$$\begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Calcule explícitamente la matriz exponencial e^{At} de este sistema.

Solución.- Es fácil ver que la matriz A del sistema debe ser

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí vemos que

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema l.i. de la anterior. Luego

$$Y(t) := \begin{pmatrix} \text{sen}(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental del sistema. De aquí concluímos que

$$e^{At} = Y(t)Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

TIEMPO: 2 horas.