Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2015

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
Solución Interrogación N° 2

Problema 1:

1. Resuelva de manera formal la ecuación lineal (sin siquiera pensar en el dominio de la función $y(x)$)

$$xy'' - (1+3x)y' + (1+2x)y = xe^x,$$

sabiendo que la función $y_1(x) = e^x$ es solución a la ecuación homogenea.

2. Determinar si existe solución a la ecuación que satisface la condición inicial del tipo $y(0) = a, y(1) = b$. Indique si tal solución es única.

Solución:

1. Primero calcularemos la segunda solución a la ecuación homogenea asociada. Queremos encontrar una segunda solución $y(x)$ que asumiremos es de la forma $y(x) = z(x)y_1(x)$ (no hay perdida de generalidad en hacer eso, excepto cerca de puntos donde y_1 se anula). La ecuación que debe satisfacer $y(x)$ se reduce a la siguiente ecuación diferencial para $z(x)$

$$x(z''(x)e^x + 2z'(x)e^x) - (1+3x)z'(x)e^x = 0.$$

Dividiendo por e^x y haciendo el cambio $u(x) := z'(x)$ nuestra ecuación queda de la forma

$$u'(x)x - u(x)(x+1) = 0.$$

Podemos resolver esta última ecuación por variables separadas

$$\frac{u'}{u} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow u(x) = e^{\int 1+1/x} = Ce^{x+\log(x)} = Cxe^x,$$

Para cierta constante real C, que de ahora en adelante asumiremos $C = 1$. Finalmente recordando que $z'(x) = u(x)$, obtenemos

$$z(x) = \int u(x) = \int xe^x = xe^x - e^x.$$

La segunda solución buscada es

$$y_2(x) = z(x)y_1(x) = xe^{2x} - e^{2x}.$$

Ahora procederemos a calcular una ecuación particular. Usando el método de variación de parametros queremos encontrar las funciones $c_1(x), c_2(x)$ que satisfacen la ecuación

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix},$$

ya que para tales funciones c_1, c_2 se tendrá que $y(x) = c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ es solución particular. Más explicitamente

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^{2x} - e^{2x} \\ e^x & 2xe^{2x} - e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{xe^{3x}} \begin{pmatrix} 2xe^{2x} - e^{2x} & -xe^{2x} + e^{2x} \\ -e^x & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{xe^{3x}} \begin{pmatrix} -xe^{3x} + e^{3x} \\ e^{2x} \end{pmatrix},$$

De donde

$$c_1(x) = \int_\epsilon^x -1 + \frac{1}{s} ds = -x + \log(x) + C_\epsilon,$$
$$c_2(x) = \int_\epsilon^x \frac{1}{s} e^{-s} ds,$$

para una constante C_ϵ y hemos considerado $\epsilon > 0$ pequeño para que la función $c_2(x)$ este bien definida (y como no hay un dominio determinado asumiremos que nuestras funciones están definidas solo para $x > 0$). Finalmente la solución general de nuestro problema es

$$y(x) = e^x(-x + \log(x)) + (xe^{2x} - e^{2x}) \int_\epsilon^x \frac{1}{s} e^{-s} ds + C_1 e^x + C_2(xe^{2x} - e^{2x}).$$

2. Este problema ha sido anulado porque deberia haber dicho $y(1/2) = a, y(1) = b$. En tal caso la respuesta habría sido afirmativa, hay existencia y unicidad. Evaluando en los puntos dados obtenemos el sistema

$$a = P - C_1 e^{1/2} - \frac{1}{2} e C_2,$$
$$b = Q + C_1 e,$$

donde P y Q son constantes que salen de evaluar nuestra solución particular. Lo importante es notar que dado cualquier par de números a, b, existe una única pareja de números C_1, C_2 satisfaciendo el sistema. Podemos despejar C_1 de la segunda ecuación y luego reemplazar tal valor en la primera para calcular C_2.

Problema 2:

Consideremos la ecuación

$$x''' - x'' + x' - x = 0.$$

Resuélvala transformándola en un sistema para luego resolver dicho sistema por alguno de los métodos matriciales visto en clases. Indique también si existe alguna solución particular, $x(t)$, que satisfaga $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \infty$.

Solución:
Definamos las variables auxiliares

$$y = x', \tag{1}$$
$$z = x'', \tag{2}$$

La ecuación de orden 3 se convierte en el sistema

$$x' = y, \tag{3}$$
$$y' = z, \tag{4}$$
$$z' = z - y + x, \tag{5}$$

que matricialmente se ve como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Para resolver el sistema intentaremos diagonalizar la matriz. El primer paso para tal cosa es encontrar los valores propios, que sabemos son las raices del polinomio caracteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i).$$

Va a ser conveniente denotar la matriz dentro de determinante como $A(\lambda)$. Como se ve, los valores propios son todos distintos y por tanto la matriz es diagonalizable. Ahora calculamos los vectores propios. El vector propio para el valor propio 1, que llamaremos v_1 satisface $A(1)v_1 = 0$, en terminos matriciales esto es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = 0,$$

que nos da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (o bien un multiplo de este vector). Repitiendo este argumento para encontrar los otros vectores propios, i.e. encontrar v_2, v_3 tales que $A(i)v_2 = A(-i)v_3 = 0$ nos entrega

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones a mi sistema homogeneo son combinaciones lineales de las funciones $e^t v_1$, $e^{it} v_2$, $e^{-it} v_3$. Como estamos trabajando siempre con funciones reales debemos quedarnos con la parte reales reales e imaginarias de las soluciones hayadas, basta con calcular la parte real e imaginaria de $e^{it} v_2$.

$$e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = (\cos(t) + i\sin(t)) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Finalmente una solución a la ecuación homogenea es de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix},$$

para C_1, C_2, C_3 números reales que dependen de la condición inicial al problema.
Ahora recordamos que la incognita originalmente era $x(t)$ (y la pura existencia de y, z fué una construcción auxiliar), de la fórmula arriba tenemos que

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos(t) + C_3 \sin(t).$$

Ahora vemos que cuando $t \to -\infty$, el término con que contiene e^t se va a cero y los otros dos sumandos oscilan (pero siempre manteniendose acotados, ya que la función seno y coseno están acotadas), la conclusión es que el límite nunca puede ser realizado por nuestras soluciones.

Problema 3:
Consideremos el sistema de ecuaciones

$$x' = (5A - 2)x + 4y, \tag{6}$$
$$y' = -x + (5A + 2)y, \tag{7}$$

para cierta constante $A \in \mathbb{R}$. Resuelva el problema dando la solución general del sistema. Determinar la solución con condición inicial $x(0) = y(0) = 0$.

Solución:
Primero escribimos el problema en términos matriciales

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5A-2) & 4 \\ -1 & (5A+2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz es

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} (5A-2)-\lambda & 4 \\ -1 & (5A+2)-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 5A)^2,$$

donde va a ser conveniente llamar la matriz dentro del determinante como $B(\lambda)$. Encontramos un valor propio $5A$ con multiplicidad 2. Un valor propio para nuestra matriz satisface que $B(5A)v_1 = 0$, explicitamente

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Lo que nos da una única dirección predilecta (mi espacio propio es generado por) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se sigue que nuestra matriz no es diagonalizable. Vamos a buscar el espacio propio generalizado, este viene dado por $B(5A)v_2 = v_1$, que es

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema queda como $-r + 2s = 1$, podemos considerar $s = 0, r = -1$, que nos da una solución

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente las soluciones a mi ecuación vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{5At} v_1 + C_2 (e^{5At} v_2 + t e^{5At} v_1),$$

para los vectores v_1, v_2 ya presentados y donde C_1, C_2 son números reales fijos. Observar que el par de funciones $x(t) = 0 = y(t)$ es solución al sistema, por el teorema de existencia de unicidad (que puede ser aplicado para este sistema) esta es la única solución con tal condición inicial.

Problema 4:
Un peso de 5 Kg produce un estiramiento de 0,4 m en un resorte. Asuma también que hay una fuerza externa que en tiempo t ejerce $5\sin(\alpha t)$ N de manera uniforme (asuma $\alpha \neq 5$). Ahora consideremos el objeto en la posición de equilibrio y velocidad 10 m/s hacia abajo. Encuentre la función que modela el movimiento del sistema para $\alpha = 6$. Indique el periodo del movimiento en caso de que $\alpha = 10$ y $\alpha = 6$. (Use $g = 10$).

Solución:
Ya hemos visto que la segunda ley de Newton modela el sistema con una ecuación de la forma

$$mx''(t) + kx(t) = \sin(\alpha t),$$

donde m es la masa del objeto, k una constante que solo depende del resorte (y que se calcula usando la ley de Hooke). La constante del resorte satisface $mg = 50 = (0,4)k$, en otras palabras $k = 250$. Debemos resolver la ecuación

$$5x''(t) + 125x(t) = 5\sin(\alpha t).$$

Resolveremos esta ecuación como lo hacemos para cualquier ecuación lineal no homogenea con coeficientes constantes. La ecuación homogenea es

$$x''(t) + 25x(t) = 0,$$

que tiene por solución general $x(t) = A\sin(5t) + B\cos(5t)$.
Por la naturaleza del término no homogeneo, la solución particular será una función sinuidal, digamos algo de la forma $C\sin(pt + q)$. Eligiremos p, q de modo que

$$(C\sin(pt+q))'' + 25C\sin(pt+q) = \sin(\alpha t),$$
$$-p^2C\sin(pt+q) + 25C\sin(pt+q) = \sin(\alpha t),$$
$$(25-p^2)C\sin(pt+q) = \sin(\alpha t),$$

de donde escogemos $p = \alpha, q = 0, C = \frac{1}{25-p^2} = \frac{1}{25-\alpha^2}$. Finalmente la solución general es

$$x(t) = A\sin(5t) + B\cos(5t) + \frac{1}{25-\alpha^2}\sin(\alpha t).$$

Queremos encontrar la solución que satisface $x(0) = 0, x'(0) = 10$ con $\alpha = 6$. Evaluando en $t = 0$ para la ecuación y su derivada :

$$0 = B,$$
$$10 = 5A - \frac{6}{11},$$

de donde $B = 0, A = \frac{116}{55}$, la solución pedida es

$$x(t) = \frac{116}{55}\sin(5t) - \frac{1}{11}\sin(6t).$$

El periodo de la función $x_1(t) = A\sin(5t) + B\cos(5t) - \frac{1}{11}\sin(6t)$ es 2π ya que el periodo de los primeros dos sumandos es $2\pi/5$ y el del segundo $2\pi/6$, el menor múltiplo común es 2π. El periodo de la función $x_1(t) = A\sin(5t) + B\cos(5t) - \frac{1}{75}\sin(10t)$ es $2\pi/5$ ya que el periodo de los primeros dos sumandos es $2\pi/5$ y el del segundo $2\pi/10$, el menor múltiplo común es $2\pi/5$.