PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ecuaciones Diferenciales MAT1640
Examen
Solución

30 de Junio, 2017

1. (a) Encuentre la solución general de la ecuación,

$$x'' - 6x' + 10x = 30t$$

Solución: El polinomio característico es $\lambda^2 - 6\lambda + 10$ y sus raíces son $3 + i$ y $3 - i$.
La solución general de la correspondiente ecuación homogénea es

$$c_1 e^{(3+i)t} + c_2 e^{(3-i)t},$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias.
Una solución particular, por ejemplo $\frac{9}{5} + 3t$, se puede encontrar con coeficientes indeterminados. La solución general es

$$c_1 e^{(3+i)t} + c_2 e^{(3-i)t} + \frac{9}{5} + 3t.$$

(b) Encuentre, usando la sustitución de variable $u = x + y^2$, la solución general de la ecuación

$$y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} - \frac{2}{x + y^2}.$$

Solución: La sustitución $u(x) = x + y^2$ resuelve en

$$\frac{du}{dx} = -\frac{4}{u}.$$

Con separación de variables, se tiene $\frac{1}{2}u^2 = -4x + c$.
Entonces, $\frac{1}{2}(x + y^2)^2 = -4x + c$ la solución implícita.

2. Resuelva el problema

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

donde

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) := \begin{pmatrix} \frac{e^t}{1+t^2} \\ \frac{e^t}{1+t^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 := \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solución: Por la fórmula de Duhamel,

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{f}(s)ds + e^{tA}\mathbf{y}_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La matriz A tiene valores propios 1 y 3 con vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Por lo tanto,

$$e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y, por ende,

$$\int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{f}(s)ds = e^t\int_0^t (1+s^2)^{-1}ds\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \arctan t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{tA}\mathbf{y}_0 = -5e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -5e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como resultado

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^t \arctan t - 5e^{3t} \\ e^t \arctan t + 5e^{3t} \end{pmatrix}.$$

3. Dado el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - 3xy, \\ y' = 3y - y^2 - 2xy, \end{cases}$$

encuentre el sistema linealizado correspondiente en torno a cada uno de sus puntos de equilibrio y clasifíquelos, si posible, como estables o inestables.

Solución. Los puntos de equilibrio se obtienen

$$\begin{cases} f(x,y) := x - x^2 - 3xy = 0, \\ g(x,y) := 3y - y^2 - 2xy = 0. \end{cases}$$

Hay cuatros puntos de equilibrio: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,3)$, $P_3 = (1,0)$ y $P_4 = (\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})$.

El sistema linealizado en torno a P_1 es

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 3y. \end{cases}$$

Pues $J(P_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, sus valores propios son 1 y 3, por lo tanto, por el Teorema de Hartman-Grobman, P_1 es un equilibrio inestable.

El sistema linealizado en torno a P_2 es

$$\begin{cases} x' = -8x, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases} \qquad [0, 5pt]$$

Pues $J(P_2) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$, sus valores propios son -8 y -3, por lo tanto, por el Teorema de Hartman-Grobman, P_2 es un equilibrio estable.

El sistema linealizado en torno a P_3 es

$$\begin{cases} x' = -x - 3y, \\ y' = -3y. \end{cases}$$

Pues $J(P_3) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, sus valores propios son -1 y -3, por lo tanto, por el Teorema de Hartman-Grobman, P_3 es un equilibrio inestable.

El sistema linealizado en torno a P_4 es

$$\begin{cases} x' = -\frac{8}{5}x - \frac{24}{5}y, \\ y' = \frac{2}{5}x + y. \end{cases}$$

Pues $J(P_4) = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{24}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$, sus valores propios son $-\frac{3}{10} + i\frac{\sqrt{23}}{10}$ y $-\frac{3}{10} - i\frac{\sqrt{23}}{10}$. Pues la parte real es distinta de 0, se puede aplicar el Teorema de Hartman-Grobman. Sigue que P_4 es un equilibrio estable, una espiral estable.

4. Considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

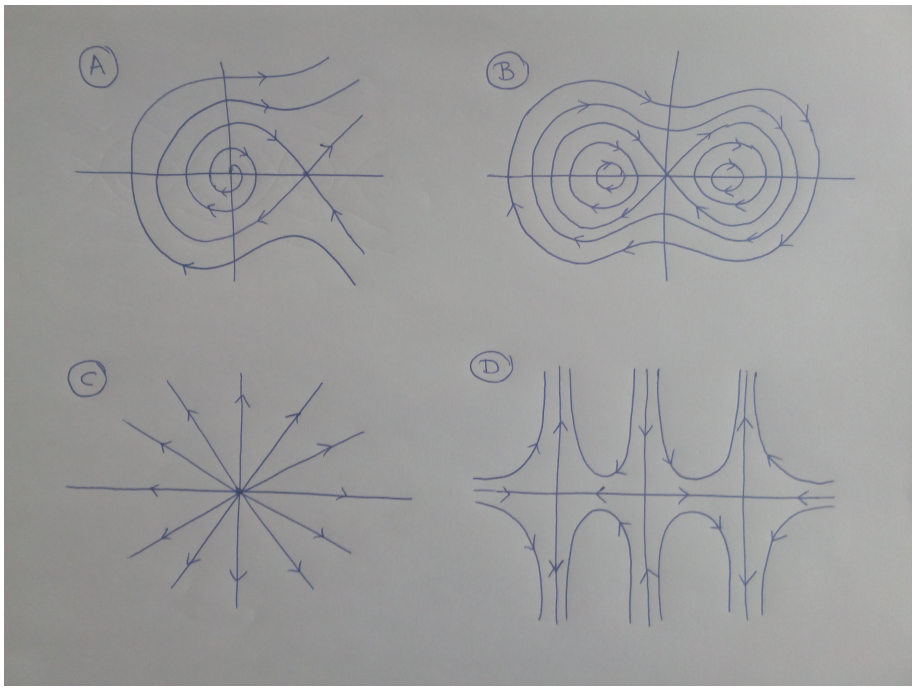
$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -2x(x-1)(2x-1) \end{cases}$$

y justifica tu respuesta adecuadamente en cada apartado.

(a) ¿Es un sistema Hamiltoniano? Si lo es, calcula una función $H(x, y)$ de la que provengan las ecuaciones. ¿Qué relación hay entre $H(x, y)$ y el plano de fases del sistema?

(b) Calcula y clasifica sus puntos de equilibrio según su estabilidad.

(c) ¿Cuál/cuáles de los siguientes planos de fases prodrían corresponder a un sistema Hamiltoniano?



Solución.

(a) $H(x, y) = y^2 + x^2(x-1)^2$

Comprobar que es Hamiltoniano

Las trayectorias en el plano de fases coinciden con las curvas de nivel de H

(b) Puntos de equilibrio: (0,0), (1/2,0), (1,0) (0.5 puntos)

Opción 1: Linealizando .

En el (0,0) la matriz jacobiana es $J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, y sus autovalores $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Por tanto es un punto estable.

En (1/2,0) tenemos $J_{(1/2,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, de autovalores $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Por tanto es un punto inestable.

En (1,0), de nuevo $J_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, con autovalores $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, y es un punto estable.

Como el sistema es Hamiltoniano, en el no lineal se mantiene el tipo de puntos de equilibrio. Por lo tanto, el (0,0) y el (1,0) son estables, y el (1/2,0) inestable.

Opción 2:

(c) A no , B sí , C no , D sí

Motivo: en los sistemas hamiltonianos sólo puede haber centros y puntos silla