PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo semestre de 2019

MAT1640 - EDO
I2 - Miércoles 9 de octubre

1. Encuentre la solución de la ecuación $x'' - 2x' + 5x = 10t.$ que satisface $x(0) = \frac{4}{5}$ y $x'(0) = 0$.

   Solución: el polinomio característico para la ecuación homogénea $x'' - 2x' + 5x = 0$ es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$, cuyas raíces son $1 - 2i$ y $1 + 2i$. Dos soluciones de la ecuación homogénea son entonces $e^{(1-2i)t}$ y $e^{(1+2i)t}$ (también $e^t \cos 2t$ y $e^t \sin 2t$). La solución general es $c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t$.

   Usando coeficientes indeterminados, $x_p = 2t + \frac{4}{5}$.

   La solución general de la ecuación dada es

   $$x = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t + 2t + \frac{4}{5}.$$

   Usando las condiciones iniciales se calculan las constantes y resulta,

   $$x = -e^t \sin 2t + 2t + \frac{4}{5}.$$

2. (a) Sabiendo que $y_1(x) = t$ es una solución de la ecuación,

   $$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0,$$

   encuentre su solución general.

   (b) Encuentre una solución particular de

   $$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 1.$$

   Solución: Usando la fórmula de Abel, una segunda solución y_2 (L.I. con y_1) satisface,

   $$ty_2' - y_2 = -\frac{1}{t}$$

   Esta última es una ecuación lineal con solución $-\frac{1}{2t}$. Podemos tomar entonces $y_2 = \frac{1}{t}$.
   Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea, usamos variación de parámetros,

   $$y_p = \int_1^t \frac{\frac{s}{t} - \frac{t}{s}}{\frac{-2}{s^2} - \frac{1}{s}} 1 ds$$

calculando la integral, da

$$y_p = \frac{t^2}{3} + \frac{1}{6t} - \frac{t}{2}$$

(Basta el primer término, los dos últimos son soluciones de la ecuación homogénea).

3. Un bloque de masa $M = 1$ está apoyado a un resorte de constante $k = 2$. Suponga que el punto de equilibrio es $x = 0$ y que en el instante $t = 0$ el bloque se encuentra en el punto 1 (con velocidad cero). Suponiendo que el roce tiene la forma $-5x'$, plantee la correspondiente ecuación diferencial y resuélvala. Además encuentre el primer instante t_1 en el cual el bloque pasa por la posición de equilibrio.

   Solución: La ecuación es

   $$x'' + 5x' + 4x = 0.$$

   Además, las condiciones iniciales son $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

   La solución general de la ecuación es $c_1e^{-t} + c_2e^{-4t}$.

   De las condiciones inciales, se deduce que,

   $$x(t) = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}.$$

   Se busca t positivo tal que $x(t) = 0$. Esto quiere decir que $4 = e^{-5t}$.

4. Encuentre dos soluciones linealmente independientes del sistema,

   $$\begin{aligned} x' &= \quad 4x + y \\ y' &= -x + 2y \end{aligned}$$

   Solución: El polinomio característico de la matriz de coeficientes

   $$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$$

   es $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$. Hay un valor propio $\lambda_1 = 3$, con multiplicidad 2.

   Un vector propio es $\mathbf{v}_1 = (1 \ -1)^T$ y una solución $e^{3t}\mathbf{v}_1$. Como $(A - \lambda_1)^2$ es la matriz cero, podemos elegir $\mathbf{v}_2 = (1 \ 1)^T$ y una segunda solución (L.i. con la ya enontrada)

   $$e^{3t}(\mathbf{v}_2 + t(A - 3I)\mathbf{v}_2).$$

   Duración: 2 horas