PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEMESTRE DE VERANO 2017

Interrogación 3
MAT1640 ⋆ ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resuelva, ocupando transformada de Laplace, la ecuación

$$y'' - y' = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 3, \\ \\ t & \text{si } t > 3. \end{cases}$$

con $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Solución:

Si $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 3, \\ \\ t & \text{si } t > 3. \end{cases}$, entonces aplicando transformada de laplace a la ecuación tenemos

$$\mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(f(t))$$

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^3 e^{-st}dt + \int_3^\infty te^{-st}dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^3 + \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_3^\infty \\ &= \frac{1}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2} \end{aligned}$$

Al mismo resultado se llega si escribimos

$$f(t) = 1+2u(t-3)+(t-3)u(t-3) \Rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(1)+2\mathcal{L}(u(t-3))+\mathcal{L}((t-3)u(t-3))$$

Aplicando transformada de laplace al lado izquierdo tenemos que

$$\mathcal{L}(y'' - y') = \mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y') = s^2\mathcal{L}(y) - s - 2 - s\mathcal{L}(y) + 1 = \mathcal{L}(y)(s^2 - s) - s - 1$$

Luego

$$\mathcal{L}(y)(s^2 - s) - s - 1 = \frac{1}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

De donde

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2 - s} + \frac{1}{s(s^2 - s)} + 2\frac{e^{-3s}}{s(s^2 - s)} + \frac{e^{-3s}}{s^2(s^2 - s)}$$

Haciendo fracciones parciales tenemos que

- $\frac{1}{s^2 - s} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$
- $\frac{1}{s(s^2 - s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$
- $\frac{1}{s^2(s^2 - s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}$

De lo anterior

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y) &= \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + 2\frac{e^{-3s}}{s-1} - 2\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s-1} - \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} \\
&= \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + 3\frac{e^{-3s}}{s-1} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} \\
&\Rightarrow \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s-1}\right) - 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s}\right) \\
&\quad -3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s^3}\right) \\
&= 3e^t - 2 - t + 3u(t-3)e^{t-3} - 3u(t-3) - 3u(t-3)(t-3) - u(t-3)\frac{(t-3)^2}{2}
\end{aligned}$$

2. Resolver el sistema

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X(t)$$

Sujeto a $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

Tenemos que el polinomio característico es $p(\lambda) = |A - \lambda I_3| = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$. Es decir tenemos dos valores propios y uno con multiplicidad dos.

- Si $\lambda = 4$, entonces tenemos que resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde tenemos que los vectores propios asociados a $\lambda = 4$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego tomando $a = 1$ tenemos que un vector propio es

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Si $\lambda = 2$, entonces tenemos que resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde tenemos que los vectores propios asociados a $\lambda = 2$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a - 4c \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, tenemos que la multiplicidad geométrica para este valor propio es dos. Luego tomando $a = 1$ y $c = 0$ tenemos que un vector propio es

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y tomando $a = 0$ y $c = 1$ tenemos que un vector propio es

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente la solucón general del sistema es

$$X(t) = C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Imponiendo la condición inicial se tiene que $C_1 = -6$, $C_2 = 7$ y $C_3 = 3$ de donde la solución pedida es

$$X(t) = -6e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 7e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. *a*) Encuentra e^{At} si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Resolver el sistema

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix}$$

Sujeto a $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

a) El polinomio característico de la matriz A es $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Luego

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{tI_2} e^{A - I_2} \\ &= e^t (I_2 + (A - I_2)t) \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Sabemos que la solución buscada es de la forma

$$X(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{At} \int e^{-At} \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} dt$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{At} \int e^{-At} \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} dt &= e^t \begin{bmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{bmatrix} \int e^{-t} \begin{bmatrix} 1 + t & -t \\ t & 1 - t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} dt \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ 2t - 1 \end{bmatrix} dt \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t + t^2 \\ t^2 - t \end{bmatrix} \\ &= e^t \begin{bmatrix} -t^2 + t \\ -t^2 - t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{At}\int e^{-At}\begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} dt \\ &= e^t\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix} -t^2+t \\ -t^2-t \end{bmatrix} \\ &= e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix} -t^2+t \\ -t^2-t \end{bmatrix} \\ &= e^t\begin{bmatrix} 1-t^2+t \\ 1-t^2-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Encuentre todos los puntos críticos del sistema dado e investigue el tipo y la estabilidad de cada uno.

$$\begin{aligned} x'(t) &= y^2 - 1 \\ y'(t) &= x^3 - y \end{aligned}$$

Solución:

Sean $F(x,y) = y^2 - 1; \quad G(x,y) = x^3 - y.$

Los puntos críticos son las dos soluciones del sistema $\{F(x,y) = 0;\ G(x,y) = 0\}$ a saber: $P_1(-1, -1)$ y $P_2(1, 1)$.

La matriz de linealización des la matriz Jacobiana:

$$J(F,G)(x,y) = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- En el punto P_1 dicha matriz es

$$J(F,G)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $p(x) = x^2+x+6$. Por ende sus valores propios son $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2}\, i$ ambos complejos con parte real negativa. Luego el punto $(-1, -1)$ es un punto espiral estable.

- En el punto P_2

$$J(F,G)(0,4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $p(x) = x^2+x-6$. Por ende sus valores propios son -3 y 2 ambos reales de distinto signo. Luego el punto $(1, 1)$ punto silla inestable.