Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - MAT 1640
Interrogación 2
el 4 de mayo de 2017
SOLUCIONES

Problema 1. (i) Encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = (2y - \pi)\cos y \tag{1}$$

y clasifíquelos como estables (sumideros), inestables (fuentes) o semiestables (nodos).
(ii) Sea $y(t; y_0)$ la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = (2y - \pi)\cos y, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Para cada punto de equilibrio a de (1), encuentre todos los y_0 tales que $\lim_{t\to\infty} y(t; y_0) = a$.
Solución: (i) Los puntos de equilibrio para (1) son las soluciones de la ecuación

$$f(y) = 0 \tag{2}$$

donde

$$f(y) := (2y - \pi)\cos y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Las soluciones de (2) son $a_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Clasifiquemos estos puntos de equilibrio. Tenemos

$$f'(a_k) = 2k\pi(-1)^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, si $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ y k es impar o si $-k \in \mathbb{N}$ y k es par, tenemos $f'(a_k) > 0$ y a_k es inestable (fuente). Si $k \in \mathbb{N}$ y k es par o si $-k \in \mathbb{N}$ y k es impar, tenemos $f'(a_k) < 0$ y a_k es estable (sumidero). Si $k = 0$, entonces $f'(a_0) = 0$ pero $f''(a_0) = -4 < 0$ y a_0 es semiestable (nodo).
(ii) Sea

$$\mathcal{A}_k = \left\{ y_0 \in \mathbb{R} \,|\, \lim_{t\to\infty} y(t; y_0) = a_k \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, si a_k es equilibrio inestable, $\mathcal{A}_k = \{a_k\}$. Si a_k es equilibrio estable, $\mathcal{A}_k = (a_k - \pi, a_k + \pi)$. Finalmente, $\mathcal{A}_0 = [a_0, a_0 + \pi)$ como $f''(a_0)$ es negativa.

Problema 2. (i) Demuestre que si y es solución de la ecuación

$$y'(t) - ty(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

entonces y también es solución de la ecuación

$$ty''(t) - 2(t^2 + 1)y'(t) + t(t^2 + 1)y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Encuentre una solución no nula de (4).
(ii) Halle la solución general de la ecuación

$$ty''(t) - 2(t^2+1)y'(t) + t(t^2+1)y(t) = 0, \quad t > 0. \tag{5}$$

Solución: (i) La solución general de (3) es $y_c(t) = ce^{t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$, con constante arbitraria $c \in \mathbb{R}$. Reemplazando y_c en (4), obtenemos que y_c es solución de esta ecuación. Eligiendo, digamos, $c = 1$, encontramos que la función $y_1(t) = e^{t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$, es solución no nula de (8).
(ii) Aplicando el método de reducción de orden, obtenemos la solución $y_2(t) := t^3 e^{t^2/2}$ de (5). Como y_1 e y_2 son linealmente independientes en $(0, \infty)$, encontramos que la solución general y de (5) es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 + c_2 t^3)e^{t^2/2}, \quad t > 0, \tag{6}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Problema 3. Halle la solución general de la ecuación

$$y''' - 2y'' + y' = \frac{te^t}{(t+1)^2}, \quad t > -1. \tag{7}$$

Solución: La ecuación homogénea asociada a (7) es

$$y''' - 2y'' + y' = 0, \tag{8}$$

la ecuación característica es

$$r^3 - 2r^2 + r = 0,$$

las raíces son $r_1 = 0$ con multiplicidad 1 y $r_2 = 1$ con multiplicidad 2. Por lo panto la solución general de (8) es

$$y_{\text{gen}} = c_1 + c_2 e^t + c_2 t e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

donde c_1, c_2, c_3 son tres constantes arbitrarias. Estamos buscando una solución particular y_{p} en la forma

$$y_{\text{p}} = u_1 + u_2 e^t + u_3 t e^t \tag{10}$$

donde u_1, u_2, u_3 satisfacen el sistema

$$\begin{cases} u_1' + e^t u_2' + te^t u_3' = 0, \\ e^t u_2' + (t+1)e^t u_3' = 0, \\ e^t u_2' + (t+2)e^t u_3' = \frac{te^t}{(t+1)^2}. \end{cases} \tag{11}$$

Restando la segunda ecuación en (11) de la tercera, obtenemos $u_3' = \frac{t}{(t+1)^2} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}$, es decir

$$u_3 = \ln(1+t) + \frac{1}{t+1}. \tag{12}$$

La segunda ecuación en (11) implica $u_2' = -(t+1)u_3' = -\frac{t}{t+1} = -1 + \frac{1}{t+1}$,

$$u_2 = -t + \ln(1+t). \tag{13}$$

Finalmente, restando la segunda ecuación en (12) de la primera, obtenemos $u_1' = e^t u_3' = \frac{e^t t}{(t+1)^2}$, es decir

$$u_1 = \int \frac{e^t t}{(t+1)^2} dt = \int \left(\frac{e^t}{t+1}\right)' dt = \frac{e^t}{t+1}. \tag{14}$$

Combinando (9) - (14), obtenemos que la solución general y de (7) es

$$y = y_{\text{gen}} + y_{\text{p}} = c_1 + c_2 e^t + c_3 t e^t + e^t(1 - t + (1+t)\ln(1+t)), \quad t > -1,$$

donde c_1, c_2, c_3 son tres constantes arbitrarias.

Problema 4. Consideremos una masa de 1 kg sujeta a fuerza elástica F_{el} con coeficiente $k = 4$ N/m y a fuerza exterior

$$F_{\text{ext}}(t) = \cos(\omega t) - e^{-2t}$$

donde ω es parámetro real. Sea $x(t) \in \mathbb{R}$ la posición de la masa en el momento $t \geq 0$.
(i) Encuentre todos ω para los cuales la función $x(t)$, $t \geq 0$, no es acotada para cualesquiera datos iniciales. Justifique su respuesta.
(ii) Sea ω un valor que satisface la condición de la parte (i). Encuentre explícitamente $x(t)$, $t \geq 0$, si en el momento inicial $t = 0$ la fuerza elástica F_{el} y la velocidad de la masa son nulas.
Solución: (i) La ecuación que satisface x es

$$x'' + 4x = \cos(\omega t) - e^{-2t}. \tag{15}$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es $x_{\text{gen}} = c_1 \cos(2t) + c_2 \text{sen}(2t)$ donde c_1, c_2 son dos constantes que se definen únicamente por los datos iniciales.
Podemos encontrar una solución particular x_{p} de (15), utilizando, digamos, el método de coeficientes indeterminados. Tenemos

$$x_p = \frac{1}{4-\omega^2}\cos(\omega t) - \frac{1}{8}e^{-2t}$$

si $\omega \neq \pm 2$ y

$$x_p = \frac{1}{4} t \,\text{sen}(2t) - \frac{1}{8}e^{-2t}$$

si $\omega = \pm 2$. Por lo tanto, si $\omega \neq \pm 2$, la solución general x de (15) es la función

$$x = x_{\text{gen}} + x_p = c_1 \cos(2t) + c_2 \,\text{sen}(2t) + \frac{1}{4-\omega^2}\cos(\omega t) - \frac{1}{8}e^{-2t}$$

que es acotada si $t \geq 0$ para todos c_1, c_2. Por otro lado, si $\omega = \pm 2$, la solución general y de (15) es la función

$$x = x_{\text{gen}} + x_p = c_1 \cos(2t) + c_2 \,\text{sen}(2t) + \frac{1}{4} t \,\text{sen}(2t) - \frac{1}{8}e^{-2t} \tag{16}$$

que no es acotada para todos c_1, c_2. Por ende, $x(t)$ no es acotada en $[0, \infty)$ si y sólo si $\omega = \pm 2$.
(ii) Bajo las condiciones de esta parte tenemos $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Suponiendo que $\omega = \pm 2$ y utilizando (16) y los datos iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, obtenemos $c_1 = \frac{1}{8}$, $c_2 = -\frac{1}{8}$. Por lo tanto,

$$x(t) = \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{8}\text{sen}(2t) + \frac{1}{4} t \,\text{sen}(2t) - \frac{1}{8}e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$