Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - MAT 1640
Interrogación 3

el 31 de mayo de 2016

SOLUCIONES

Problema 1. Verifique que la solución del problema

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

es un polinomio de cuarto grado y encuentre sus coeficientes.
Solución: Buscamos la solución de (1) en la forma de una serie $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j x^j$, convergente en un entorno de $x = 0$. Los datos iniciales en (1) implican

$$y_0 = 3, \tag{2}$$

$$y_1 = 0. \tag{3}$$

La ecuación diferencial en (1) implica

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) y_{j+2} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(j(j+1) - 20\right) y_j x^j,$$

es decir

$$y_{j+2} = \frac{j(j+1) - 20}{(j+2)(j+1)} y_j, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Como $y_1 = 0$ por (3), todos los coeficientes y_j con indices j impares son nulos. Además, como $y_6 = 0$ por (4) con $j = 4$, todos los coeficientes y_j con indices $j \geq 6$ pares son nulos. Finalmente, por (2) y (4) con $j = 0$ y $j = 2$, tenemos

$$y_2 = -30, \quad y_4 = 35.$$

Como resultado,

$$y(x) = 35x^4 - 30x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. Resuelva el problema

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5}$$

Solución: La matriz $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en (5) tiene valor propio $\lambda = 3$ de multiplicidad algebráica 2 y multilplicidad geométrica 1, con vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y vector propio generalizado $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, la matriz

$$\Psi(t) := e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

es matriz fundamental de soluciones del sistema en (5). Por ende, la solución del problema (5) es

$$\mathbf{y}(t) = \Psi(t)\Psi(0)^{-1}\mathbf{y}(0) = e^{3t}\begin{pmatrix} 2t+1 \\ -2t+1 \end{pmatrix}.$$

Problema 3. Sea

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcule la matriz exponencial e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.
Solución: La matriz A tiene valores propios $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ y $\lambda_3 = 5$ con vectores propios $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 3-i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 3+i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, la matriz

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} -2\cos t & -2\operatorname{sen} t & 0 \\ 3\cos t + \operatorname{sen} t & 3\operatorname{sen} t - \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

es matriz fundamental de soluciones del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Por ende,

$$e^{tA} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t + 3\operatorname{sen} t & 2\operatorname{sen} t & 0 \\ -5\operatorname{sen} t & \cos t - 3\operatorname{sen} t & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Problema 4. Encuentre la solución general del sistema

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{y} + e^t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Solución: Sean

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) := e^t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La matriz B tiene valores propios $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -1$ con vectores propios $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, la matriz

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} 4e^{-3t} & 2e^{-t} \\ -3e^{-3t} & -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

es matriz fundamental de soluciones del sistema $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$. Por ende, la solución general de (6) es

$$\mathbf{y}(t) = \Psi(t)\int \Psi(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt + \Psi(t)\mathbf{c}$$

$$= \frac{1}{2}e^t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1e^{-3t}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ es un vector constante arbitrario.

Problema 5. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{a}. \end{cases} \tag{7}$$

Determine si el punto de equilibrio $\mathbf{0}$ es atractor, repulsor o silla y encuentre todos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tales que la solución $\mathbf{y}(t, \mathbf{a})$ de (7) satisface $\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Solución: La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ en (7) tiene valores propios $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 2$. Por lo tanto, $\mathbf{0}$ es silla.

Los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ son $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, la solucuón general del sistema en (7) es

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son constantes arbitarias. Para que se cumpla

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}, \tag{8}$$

es necesario y suficiente que $c_2 = 0$. Por lo tanto, los datos iniciales para cuales se cumple (8) son

$$\mathbf{a} = \mathbf{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$.