Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2025

MAT1640 - Ecuaciones diferenciales ordinarias
Interrogación 1

1. **(6 ptos)** Considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x-2)y' = y^2 - 1 \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

(a) Determina todas las soluciones de este PVI.
(b) ¿Por qué no contradice el Teorema de existencia y unicidad de soluciones?

Solución.
(a) Notamos que la solución singular $y(x) \equiv 1$ de la ecuación $(x-2)y' = y^2 - 1$ es solución del PVI y cumple la condición inicial. Sin embargo, la otra solución singular $y(x) \equiv -1$ de la ecuación no satisface el PVI y por lo tanto no es solución.
Sea $y(x) \neq \pm 1$. Para determinar la solución faltante, resolvemos la ecuación por separación de variables tal que

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} = \frac{\mathrm{d}x}{x-2},$$

y por descomposición en fracciones simples, tenemos

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{y-1} - \frac{\frac{1}{2}}{y+1} \right) \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x-2},$$

o sea

$$\frac{y-1}{y+1} = C(x-2)^2, \ C \in \mathbb{R}.$$

Despejando, se obtiene

$$y(x) = \frac{1 + C(x-2)^2}{1 - C(x-2)^2}, \ C \in \mathbb{R},$$

y notamos que la condición inicial $y(1) = 2$ está satisfecha para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$ y si $C = 0$ se obtiene $y(x) = 1$ que es nuestra primera solución.

Observación. Por separación de variable, se obtiene infinitas soluciones incluyendo la solución constante $y \equiv 1$ y por lo tanto no es necesario determinarla aparte.

(b) Esto no contradice el Teorema de existencia y unicidad porque la función definida por $f(x,y) = \frac{y^2-1}{x-2}$ no es continua en el punto $(2,1)$.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(3 ptos)** para la resolución por separación de variables de la edo $\frac{y'}{y^2-1} = \frac{1}{x-2}$ en el caso que $y(x) \neq 1$. Descontar **(0.5 pto)** si se comete a lo más un error en la integración. Asignar **(1 pto)** si un alumno determina sólo la solución singular $y \equiv 1$, sin separación de variables y sin encontrar la familia infinita de soluciones.
- Asignar **(1 pto)** por expresar explicítamente y determinado la familia de soluciones.

(b) Asignar **(2 ptos)** por justificar correctamente que la función f no cumple las condiciones del Teorema de existencia y unicidad en una vecindad del punto $(2,1)$.

2. (a) **(3 ptos)** Resuelva el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2 - \cos(x)\sin(x)}{y(1-x^2)} \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

determinando explícitamente la solución y su intervalo maximal de definición.

(b) **(3 ptos)** Decida si las siguientes afirmaciones son verdades o falsas justificando las respuestas.

(i) Una solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = x^2 + t^2 \\ x(1) = 4, \end{cases}$$

definida en el intervalo $(0, 5)$, satisface $x(3) = 2$.

(ii) La ecuación diferencial $y' + y + y^2 + \mathrm{e}^x = 0$ se transforma en una ecuación diferencial lineal de orden 2 mediante el cambio de variable $y = \dfrac{z'}{z}$.

Solución.

(a) Escribimos la ecuación diferencial de la forma

$$\underbrace{(\cos x \sin x - xy^2)}_{M(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{y(1-x^2)}_{N(x,y)}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Notamos que la funciones M y N son de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$ y

$$\partial_y M = -2xy = \partial_x N.$$

Así la ecuación diferencial es exacta en todo $\mathbb{R}^2$ y existe entonces una función F definida en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} \partial_x F = M \\ \partial_y F = N. \end{cases}$$

Determinamos F integrando la primera ecuación con respecto a x y obtenemos

$$F(x,y) = \int (\cos x \sin x - xy^2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\cos^2 x + x^2y^2) + h(y),$$

donde la función arbitraria h es la constante de integración con respecto a x. Ahora derivamos con respecto a y y usamos la segunda ecuación para obtener

$$\partial_y F(x,y) = -x^2 y + h'(y) = y(1-x^2),$$

y por lo tanto $h'(y) = y$ o sea por $h(y) = \frac{1}{2}y^2$. Así tenemos

$$F(x,y) = -\frac{1}{2}(\cos^2(x) + x^2y^2) + \frac{1}{2}y^2$$

y la solución implícita está dada por la familia

$$y(1-x^2) - \cos^2(x) = 2c,\ c \in \mathbb{R}.$$

La condición inicial $y(0) = 2$ implica que $4(1-0) - 1 = 2c$ o sea $2c = 3$ y finalmente la solución del PVI será

$$y(x) = \sqrt{\frac{3 + \cos^2(x)}{1-x^2}},$$

y está definida en $I = (-1, 1)$ (notar que $0 \in I$).

(b) (i) **Falsa.** Claramente $x'(t) \geq 0$ pra todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto cualquier solución es creciente. Así si una solución satisface la condición inicial $x(1) = 4$ entonces no puede satisface $x(3) = 2$ sino sera decreciente.

(ii) **Verdadera.** Considerando la sustitución indicada, tenemos

$$y' = \frac{z''}{z} - \left(\frac{z'}{z}\right)^2$$

y luego resulta la nueva ecuación diferencial en z dada por $z'' + z' + \mathrm{e}^x z = 0$, que es lineal y de segundo orden.

Asignación de puntaje

(a) Resolver la ecuación diferencial $(\cos x \sin x - xy^2)\mathrm{d}x + y(1-x^2)\mathrm{d}y = 0$.

- Asignar **(1 pto)** por demostrar que es una ecuación exacta.
- Asignar **(0,25 pto)** por indicar que es exacta en $\mathbb{R}^2$ (o al menos una región abierta que contiene al punto $(0, 2)$).
- Asignar **(1,25 ptos)** por determinar la función F. Si se comete a lo más un error en el cálculo que permite determinar la función F, asignar **(1 pto)**.
- Asignar **(0,25 pto)** por expresar explícitamente la solución $y(x) = \sqrt{\frac{3+\cos^2(x)}{1-x^2}}$.
- Asignar **(0,25 pto)** por determinar el intervalo maximal $I = (-1, 1)$ de definición de esta solución.

(b) (i)

- Asignar **(0.5 pto)** por responder falsa.
- Asignar **(1 pto)** por justificar correctamente que cualquier solución tiene que ser creciente.

(ii) - Asignar **(0.5 pto)** por responder verdadera.
- Asignar **(1 pto)** por justificar su respuesta determinando la nueva ecuación diferencial y clasificándola.

3. **(6 ptos)** Supongamos que el crecimiento tumoral en células obedece la ecuación diferencial de Gompertz

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ry \ln\left(\frac{y}{k}\right),$$

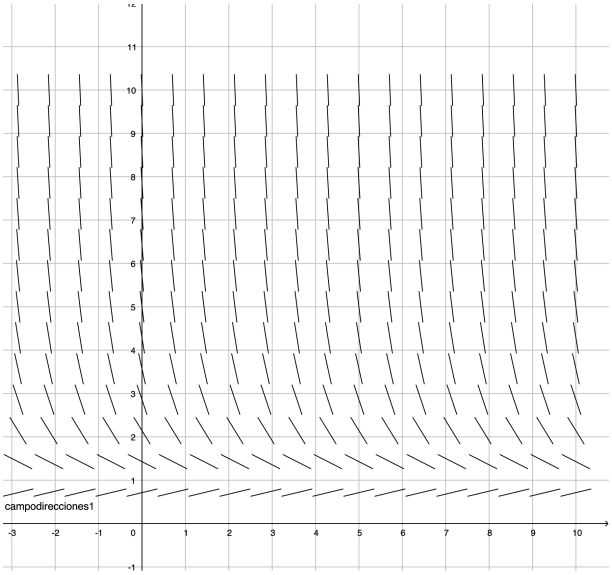
donde r y k son constantes positivas.

(a) Dibuja el campo direccional asociado a esta ecuación suponiendo (sólo en este item) que $r = k = 1$.

(b) Si el número inicial células es $y(0) = N_0$ con $N_0 \neq k$, resuelva la ecuación diferencial y describa el comportamiento límite de $y(t)$ cuando $t \to +\infty$ en terminos de los parámetros r, k y N_0.

Solución.

(a) Ver la figura de campos direccionales.



(b) **Método 1.** Sea $u = \ln\left(\frac{y}{k}\right)$. Entonces $\mathrm{e}^u = \frac{y}{k}$ y luego $y' = k\mathrm{e}^u$ y $y' = ku'\mathrm{e}^u$. Sustituyendo, obtenemos la nueva ecuación diferencial

$$u' = -ru,$$

que es lineal y separable y cuya solución está dada por $u(t) = c\mathrm{e}^{-rt}$ donde $c \in \mathbb{R}$. Como $y(0) = N_0$ entonces $c = \ln\frac{N_0}{k}$ y luego

$$y(t) = k\mathrm{e}^{\ln(\frac{N_0}{k})\mathrm{e}^{-rt}}$$

y por lo tanto

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = k,$$

independientemente de lo otros parámetros.

Método 2. Por separación de variable, tenemos

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln(\frac{y}{k})} = -r\int \mathrm{d}t,$$

o sea

$$\int \frac{\mathrm{d}(\frac{y}{k})}{\ln(\frac{y}{k})} = -r\int \mathrm{d}t,$$

y luego $\ln|\ln\frac{y}{k}| = -rt + c$. Como $y(0) = N_0$ entonces tenemos $\mathrm{e}^c = \ln\frac{N_0}{k}$. Por lo tanto, $\ln(\frac{y}{k}) = \ln(\frac{N_0}{k})\mathrm{e}^{-rt}$ y finalmente la solución de la ecuación está dada por $y(t) = k\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-rt+c}}$.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(1 pto)** por calcular pendientes $m = f(x, y)$ en algunos puntos (x, y) de plano.
- Asignar **(1 pto)** por dibujar las pequeñas lineas del campo direccional.

(b) **Método 1.**
- Asignar **(0.5 pto)** por considerar la sustitución $u = \ln\left(\frac{y}{k}\right)$ y la obtención de una nueva ecuación diferencial. Asignar **(1 pto)** por resolver correctamente esta nueva ecuación diferencial. Descontar **(0.5 pto)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pto)** por volver a la variable inicial.
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar la constante c en términos de los parámetros.
- Asignar **(0.5 pto)** por expresar la solución en términos de los parámetros.
- Asignar **(1 pto)** por calcular correctamente el límite $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Método 2.
- Asignar **(2 ptos)** por resolver la ecuación por separación de variables. Descontar **(0.5 pto)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar la constante c en términos de los parámetros.
- Asignar **(0.5 pto)** por expresar la solución en términos de los parámetros.
- Asignar **(1 pto)** por calcular correctamente el límite $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

4. Un gran depósito de capacidad infinita está inicialmente lleno con 100 L de agua pura. Una salmuera con **concentración** de $0{,}2\,\mathrm{kg.L^{-1}}$ se bombea al interior a razón de $2\,\mathrm{L.min^{-1}}$, mientras que la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera a razón de $1\,\mathrm{L.min^{-1}}$.

   (a) Demuestra que la cantidad de sal $S(t)$ en el instante t satisface la ecuación diferencial
   $$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0,4 - \frac{S}{t+100}.$$
   ¿Cuál es la máxima **concentración** de sal que podría haber en el depósito?

   (b) ¿En qué instante la **concentración** de sal alcanza los $0{,}1\,\mathrm{kg.L^{-1}}$?

Solución.

(a) Se trata de un problema de tanque con volumen variable. Si $V(t)$ es el volumen de salmuera presente en el tanque en el instante t, entonces
$$V(t) = 100 + t.$$
Sea $S(t)$ la cantidad de sal, medidas en kg, en el depósito en el instante t, medido en min. Como entra $0{,}2\,\mathrm{kg.L^{-1}}$ a $2\,\mathrm{L.min^{-1}}$, la tasa de entrada es $2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4\,\mathrm{kg.min^{-1}}$.
La salida de sal es
$$1 \cdot \frac{S(t)}{100+t} = \frac{S(t)}{100+t}.$$
Entonces
$$\frac{dS}{dt} = 0{,}4 - \frac{S}{100+t},$$
que es una ecuación diferencial lineal cuyo factor integrante es $\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}t}{t+100}} = 100 + t$. Luego
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((t+100)S(t)\Big) = 0,4(t+100),$$
y integrando ambos lados, se obtiene
$$S(t) = 0,2(t+100) + \frac{C}{t+100},\ C \in \mathbb{R}.$$
Usando la condición inicial $S(0) = 0$ implica que $C = -2000$ y por lo tanto la concentración de sal está dada por
$$S(t) = 0{,}2(100+t) - \frac{2000}{100+t}.$$
Notamos que la cantidad de sal crece sin límite, pero la *concentración* tiene un valor límite a largo tiempo y está dado por

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{S(t)}{100+t} = \lim_{t\to+\infty} \left(0{,}2 - \frac{2000}{(100+t)^2}\right) = 0{,}2\,\text{kg.L}^{-1}.$$

Esa es la concentración máxima posible.

(b) Determinamos t_0 tal que $\dfrac{S(t)}{100+t_0} = 0{,}1$ o sea tal que

$$0,2 - \frac{2000}{(t_0+100)^2} = 0,1,$$

y luego $(t_0+100)^2 = 2.10^4$ para obtener finalmente $t_0 = 100(\sqrt{2}-1)$ y esto corresponde aproxidamente a $41,42$ min.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(2 ptos)** por determinar la ecuación diferencial que modela la cantidad de sal. Descontar **(0.5 pto)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(1 pto)** por resolver correctamente la ecuación diferencial asociada.
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar la constante C tomando en cuenta la condición inicial $S(0) = 0$.
- Asignar **(1 pto)** por determinar la concentración máxima de sal calculado $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{S(t)}{t+100}$.

(b)
- Asignar **(1.5 pto)** por determinar el instante en qué la concentración es igual a $0{,}1\,\text{kg.L}^{-1}$.