PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2020

INTERROGACIÓN 1 – Pauta
MAT1640

Problema 1. Considere el PVI

$$x^2u' = u - 1\ ,\ u(a) = b.$$

(a) Determine los valores de a y b para los cuales se puede garantizar existencia y unicidad de soluciones gracias al Teorema de Picard. Encuentre estas soluciones.

(b) Determine los valores de a y b para los cuales el problema no admite solución.

(c) Determine los valores de a y b para los cuales el problema tiene infinitas soluciones. *(Ayuda: Mire límites laterales y considere definir funciones a trozos.)*

Solución Problema 1.
(a) La EDO puede reescribirse como

$$u' = \frac{u-1}{x^2} = f(x,u).$$

Luego, $\partial_u f = x^{-2}$. En consecuencia, el Teorema de Picard aplica siempre que $a \neq 0$, y en tales casos tenemos existencia y unicidad de soluciones ([**1 pt**]). El método de separación de variables arroja que estas soluciones son de la forma

$$u(x) = 1 + Ce^{-\frac{1}{x}}$$

con C arbitrario ([**1,5 pt**]; cualquiera sea el método usado). Para satisfacer $u(a) = b$ debemos tener

$$C = (b-1)e^{1/a}$$

por lo que la solución del PVI es

$$u(x) = 1 + (b-1)e^{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}.\ \textbf{[0,5 pt]}$$

(b) Si $a = 0$ entonces una solución debe satisfacer $0 = u(0) - 1$. Por lo tanto, no existen soluciones si $b \neq 1$ ([**1 pt**]).
(c) Si $a = 0$ y $b = 1$ existen infinitas soluciones. En efecto, verificamos que

$$u(x) = \begin{cases} 1 + Ce^{-\frac{1}{x}} & ,\ x > 0 \\ 1 & ,\ x \leq 0. \end{cases}$$

es una familia de soluciones ([**1 pt**] por reconocer la familia). Es inmediato que $u(0) = 1$. Por otro lado, de la parte (a) sabemos que estas funciones son soluciones para $x > 0$ y $x < 0$ por lo que resta verificar que son soluciones de la EDO en $x = 0$. Como

$$\lim_{x\to 0^+} u(x) = 1$$

las funciones son continuas en 0. Es directo que

$$u'(x) = \begin{cases} C\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$$

mientras que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{u(h) - u(0)}{h} = 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{u(h) - u(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{Ce^{-1/h}}{h} = \lim_{t \to \infty} \frac{Ct}{e^t} = 0$$

por lo que $u'(0)$ existe y

$$u'(x) = \begin{cases} C\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0. \end{cases} \quad \textbf{[0,5 pt]}$$

Finalmente,

$$\lim_{h \to 0^+} C\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{Ct^2}{e^t} = 0$$

por lo que u' es continua en 0, y como se satisface la EDO en $x = 0$, tenemos que u es una familia de soluciones ([**0,5 pt**]; se debe verificar que u' es continua en 0).

Problema 2. Un modelo posible para el crecimiento de una población es asumir que la tasa de cambio de la población es igual a la tasa de cambio de los nacimientos menos la tasa de cambio de las muertes. Más aún, es razonable asumir que tanto la tasa de nacimientos como la de muertes son directamente proporcionales al tamaño de la población (con constantes de proporcionalidad posiblemente distintas).

(a) Escriba una ecuación diferencial que describe este modelo de crecimiento poblacional.

(b) Encuentre una solución particular que en el tiempo t_0 sea igual a $P_0 > 0$.

(c) Suponga las constantes de proporcionalidad son k_1 y k_2. Haga una predicción (justificadamente) respecto al tamaño de la población cuando el tiempo tiende a infinito en los casos $k_1 < k_2$, $k_1 = k_2$, y $k_1 > k_2$.

Solución Problema 2.
(a) Escribimos $P(t)$ para el tamaño de la población en función del tiempo, N para la tasa de nacimientos y M para la tasa de muertes. Del enunciado

$$P' = N - M \ , \ N = k_1 P \ , \ M = k_2 P \ \textbf{[1 pt]}$$

por lo que la EDO se puede escribir como

$$P' = (k_1 - k_2)P. \ \textbf{[1,5 pt]}$$

(b) Reconocemos esta ecuación como una modificación del modelo simple de crecimiento $P' = kP$ donde $k = k_1 - k_2$, por lo que la solucion general es

$$P(t) = Ce^{(k_1 - k_2)t} \ \textbf{[1 pt]}$$

y la solución particular buscada es

$$P(t) = P_0 e^{(k_1 - k_2)(t - t_0)}. \ \textbf{[1 pt]}$$

(c) Nos enfocamos en $P_0 > 0$ ($C > 0$) pues buscamos hacer predicciones para el crecimiento de la población y $P_0 < 0$ no tiene sentido, mientras que si $P_0 = 0$ entonces la solución es constante igual a 0.

Si $k_1 > k_2$ (tasa de nacimientos mayor que tasa de muertes) entonces

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \infty$$

por lo que la población crece a infinito (sin cota superior) (**[0,5 pt]**). Si $k_1 = k_2$ (tasa de nacimientos igual que tasa de muertes)

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} P_0 = P_0$$

y la población es constante en el tiempo (**[0,5 pt]**). Finalmente, si $k_1 < k_2$ (tasa de nacimientos menor que tasa de muertes) entonces

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = 0$$

y la población se extingue a medida que el tiempo tiende a infinito (**[0,5 pt]**).

Problema 3. Encuentre soluciones (familias de soluciones en el caso de las EDOs) para tres, y sólo tres, de los siguientes problemas:

(a) $u' + 6u - 30u^{2/3} = 0$.

(b) $1 + \ln(x) + \frac{u}{x} = (1 - \ln(x))u'$.

(c) $xu^2 \frac{du}{dx} = u^3 - x^3$, $u(1) = 2$.

(d) $u' = \frac{e^{-2\sqrt{x}} - u}{\sqrt{x}}$, $u(1) = 1$.

(e) $u(x + u + 1)dx + (x + 2u)du = 0$.

Solución Problema 3.
(a) La EDO es de Bernoulli por lo que intentamos $y = u^{1/3}$ ([**0,5 pt**]). Se tiene $y' = \frac{1}{3}u^{-2/3}u'$, y multiplicando por $\frac{1}{3}u^{-2/3}$ queda

$$y' + 2y = 10. \text{ [0,5 pt]}$$

Esta última es lineal con factor integrante

$$\rho(x) = e^{2x}$$

por lo que las soluciones son

$$y(x) = 5 + Ce^{-2x} \text{ [0,5 pt]}$$

y entonces

$$u(x) = (5 + Ce^{-2x})^3. \text{ [0,5 pt]}$$

(b) Con $M = 1 + \ln(x) + \frac{u}{x}$, $N = -1 + \ln(x)$, verificamos que

$$M_u = \frac{1}{x} = N_x \text{ [0,5 pt]}$$

por lo que la EDO es exacta. En consecuencia, buscamos

$$F = \int N du = -u + u\ln(x) + g(x) \text{ [0,5 pt]}$$

de donde

$$M = \frac{u}{x} + g' \ , \ g' = 1 + \ln(x)$$

y luego podemos tomar

$$g(x) = x + x\ln(x) - 1. \text{ [0,5 pt]}$$

Entonces $F = -u + u\ln(x) + x + x\ln(x) - 1$ y las soluciones se definen por medio de

$$-u + u\ln(x) + x + x\ln(x) - 1 = C. \text{ [0,5 pt]}$$

(c) *Método 1.* Reescribiendo como

$$u' - \frac{u}{x} = -x^2u^{-2}$$

vemos que la EDO es de Bernoulli. Luego, intentamos $y = u^3$. Como $y' = 3u^2u'$ al multiplicar por $3u^2$ obtenemos

$$y' - \frac{3y}{x} = -3x^2 \text{ [0,5 pt]}$$

la cual es lineal con factor integrante

$$\rho(x) = x^{-3}.$$

En consecuencia,

$$y = x^3(-3\ln|x| + C) \text{ [0,5 pt]}$$

y

$$u = x(-3\ln|x| + C)^{1/3}. \text{ [0,5 pt]}$$

Para satisfacer la condición inicial se requiere

$$2 = C^{1/3} \ , \ C = 8 \text{ [0,5 pt]}$$

por lo que la solución es

$$u = x(-3\ln|x| + 8)^{1/3}.$$

Método 2. Reescribiendo como

$$u' = \frac{u^3 - x^3}{xu^2}$$

vemos que es homogénea por lo que intentamos $y = u/x$. En tal caso

$$y' = \frac{u'x - u}{x^2} = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$$

y entonces, al dividir la EDO por x, obtenemos

$$y' + \frac{u}{x^2} = \frac{u}{x^2} - \frac{1}{y^2x} \ , \ y' = -\frac{1}{y^2x} \text{ [0,5 pt]}$$

Como esta separable, obtenemos

$$\frac{1}{3}y^3 = -\ln|x| + C \ , \ y = (-3\ln|x| + C)^{1/3} \text{ [0,5 pt]}$$

y entonces

$$u = x(-3\ln|x| + C)^{1/3}. \text{ [0,5 pt]}$$

Para satisfacer la condición inicial

$$C = 8 \text{ [0,5 pt]}$$

y entonces la solución es

$$u = x(-3\ln|x| + 8)^{1/3}.$$

(d) Reescribiendo como

$$u' + \frac{u}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

vemos que la EDO es lineal con factor integrante

$$\rho(x) = e^{2\sqrt{x}} \text{ [0,5 pt]}$$

de donde

$$u(x) = (2\sqrt{x} + C)e^{-2\sqrt{x}}. \textbf{ [1 pt]}$$

Para satisfacer la condición inicial

$$1 = (2 + C)e^{-2} \ , \ C = e^2 - 2 \textbf{ [0,5 pt]}$$

y entonces

$$u(x) = (2\sqrt{x} + e^2 - 2)e^{-2\sqrt{x}}.$$

(e) Con $M = ux + u^2 + u$, $N = x + 2u$, tenemos

$$\partial_u M = x + 2u + 1 \ , \ \partial_x N = 1$$

asi que la EDO no es exacta. Sin embargo,

$$\frac{\partial_u M - \partial_x N}{N} = \frac{x + 2u}{x + 2u} = 1$$

por lo que tenemos el factor integrante

$$\mu = e^x. \textbf{ [0,5 pt]}$$

Al multiplicar por μ ahora tenemos $M = (ux + u^2 + u)e^x$, $N = (x + 2u)e^x$, y entonces

$$F = \int N du = (xu + u^2)e^x + g(x) \textbf{ [0,5 pt]}$$

de donde

$$M = (xu + u + u^2)e^x + g'(x) \ , \ g'(u) = 0. \textbf{ [0,5 pt]}$$

En consecuencia, podemos tomar $g = 0$ de modo que $F = (xu+u^2)e^x$ y las soluciones son definidas por

$$(xu + u^2)e^x = C. \textbf{ [0,5 pt]}$$

Problema 4. Considere la ecuación

$$\frac{du}{dx} = x^2 - u$$

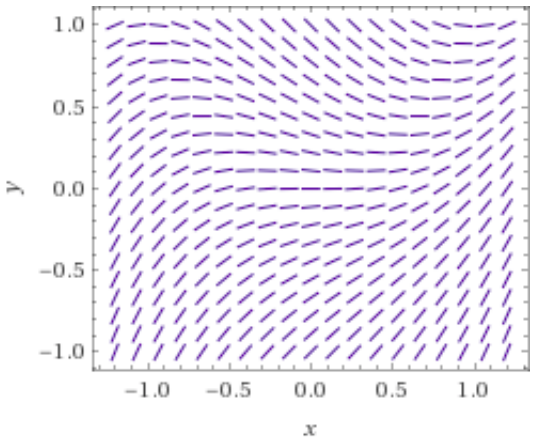
(a) Dibuje el campo de pendientes para esta ecuación.

(b) Dibuje curvas solucion que muestren el comportamiento característico de las soluciones.

Solución Problema 4.
(a) Notemos que si $C = x^2 - u$ entonces

$$u = x^2 - C$$

por lo que las isoclinas son parábolas. Esta información debiese ser suficiente para hacer un dibujo similar al siguiente



(Asignar **[1 pt]** si las isoclinas no son claras, **[2 pt]** si las isoclinas se distinguen pero hay algún error, **[3 pt]** si es posible apreciar claramente las isoclinas y no hay error. Si un error produce que las isoclinas sean erradas, entonces no asignar puntaje.)
(b) Siguiendo las direcciones dadas por las pendientes, se pueden dibujar las siguientes curvas solución sobre el campo de pendientes (imágenes separadas por claridad):



(Dibujar tres curvas, cualitativamente distintas, debiese ser suficiente. Asignar **[1 pt]** por cada una de ellas. No asignar puntaje por curvas que corresponden a un campo de pendientes erroneo.)