PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
4 de octubre de 2017.

MAT–1640 - ECUACIONES DIFERENCIALES
INTERROGACIÓN 2

1. *a*) Determine el valor de α de modo que la solución, $g(t)$, del Problema de Valor Inicial

$$y'' + y' - 2y = 0; \qquad y(0) = 1; \quad y'(0) = \alpha$$

satisfaga $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Respuesta : Las raíces del polinomio característico ($r^2 + 2 - 2$) son -2 y 1

La solución general es, pues, $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$.

Las constantes se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Para que se cumpla lo deseado necesitamos que el coeficiente C_2, de e^x, sea cero:

$$y(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 + C_2 = 1.$$
$$y'(0) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad -2C_1 + C_2 = \alpha.$$

Obtenemos $3C_2 = 2 + \alpha$. Por tanto, $C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -2$.

b) Hallar la ecuación lineal homogénea de menor orden posible que es satisfecha por la función $2e^{-t} + e^{t}\cos(2t)$.

Respuesta : El polinomio característico asociado a la ecuación buscada debe tener las raíces -1, $1 + 2i$ y $1 - 2i$.

El de menor grado es

$$p(r) = (r+1)\,(r-(1+2i))\,(r-(1-2i)) = r^3 - r^2 + 3r + 5.$$

Así, la ecuación buscada es $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0$.

2. *a*) Encontrar la solución general de $4y'' + 3y' - y = 25 - x^2$.

Respuesta : Hallamos primero solución y_H del caso homogéneo: El polinomio característico es $p(r) = 4r^2 + 3r - 1$, con raíces $r_1 = 1/4$; $r_2 = -1$.

Por tanto, $y_H = C_1 e^{\frac{t}{4}} + C_2 e^{-t}$.

Ahora buscamos solución particular y_p de la forma $y_p = Ax^2 + Bx + C$ (*coeficientes indeterminados*).

Derivando e igualando obtenemos

$$-Ax^2 + (6A - B)x + (8A + 3B - C)\ 25 - x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1; \quad B = 6; \quad C = 1.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y = C_1 e^{\frac{t}{4}} + C_2 e^{-t} + x^2 + 6x + 1.$$

b) Hallar la solución general de $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ si se sabe que $y(x) = e^x$ es una solución de la ecuación.

Respuesta : En forma normal la ecuaci'on es

$$y'' - \frac{x}{x-1}\, y' + \frac{1}{x-1}\, y = 0$$

de la forma $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, con $P(x) = -x/(x-1)$; $Q(x) = 1/(x-1)$.

Tenemos a solución $y_1 = e^x$. Buscamos otra (l.i. con la anterior) de la forma $y_2(x) = u(x)y_1(x)$.

En tal caso, por el método de reducción de orden (o la fórmula de Abel) la incógnita $u(x)$ satisface

$$y_1 u'' + (2y_1' + P(x)y_1)\, u' = 0 \quad \Leftrightarrow v' + \left(\frac{2y_1'}{2y_1} + P(x)\right) = 0 \quad \text{siendo } v = u'.$$

En este caso, se obtiene la ecuación de primer orden

$$v' + \left(2 - \frac{x}{x-1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v'}{v} = \frac{1}{x-1} - 1$$

que tiene solución $v = (x-1)e^{-x} = u'$

Integrando obtenemos $u = -xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_2 = uy_1 = -x$. Por tanto, la solución general es

$$y(x) = C_1 x + C_2 e^x.$$

3. Hallar la solución general de $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$.

Respuesta : Primero necesitamos dos soluciones fundamentales de la ecuación homogénea asociada. Como el polinomio característico es $p(r) = r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$, tenemos que la solución general del caso homogéneo es

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \text{con } y_1(x) = e^{-x}; \;\; y_2(x) = e^{-2x}.$$

Por el método de *variación de parámetros* una solución particular viene dada por

$$y_P(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)} f(x)\,dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)} f(x)\,dx$$

donde $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ y

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}$$

es el wronskiano.

Sustituyendo obtenemos

$$y_P(x) = e^{-x} \underbrace{\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx}_{I_1} - e^{-2x} \underbrace{\int e^{2x} \operatorname{sen}(e^x)\,dx}_{I_2}$$

En I_1, mediante la sustitución $u = e^x$ obtenemos $I_1 = -\cos(e^x)$.

La misma sustitución en I_2 conduce a $\displaystyle\int u \operatorname{sen}(u)\,du$ e integración por partes nos da que $I_2 = \operatorname{sen}(e^x) - e^x \cos(e^x)$. Sustituyendo obtenemos

$$y_P(x) = -e^{-x}\cos(e^x) + e^{-x}\cos(e^x) - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) = -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$$

y la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x).$$

4. Un resorte es tal que una fuerza de 400 N puede alargarlo 2 metros. Dicho resorte cuelga y en su extermo libre se instala una masa de 50 Kg. Desde su posición de equilibrio, el resorte–masa se pone en movimiento con una velocidad hacia arriba de 2 m/s. Ignorando fricción (roce), hallar la ecuación del movimiento e indicar cuál es la mayor elongación que alcanza el resorte y en que instante ésta se alcanza por primera vez

   Respuesta : El primer ddato es sólo para conocer la constante de elasticidad, k, del resorte.

   Por la Ley de Hooke, $400 = 2k \quad \Rightarrow \quad k = 200$ N/m.

   Como no hay roce, la ecuación del movimiento es $50x'' + 200x = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 4x = 0$

   junto con las *condiciones iniciales* $x(0) = 0;\ x'(0) = -2$.

   (Consideramos negativa la dirección hacia arriba. Si se la considerara positiva, el término $4x$ correspondiente a la fuerza de restauración del resorte debiera llevar signo negativo).

   La solución general de la ecuación es $x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$.

   Aplicando las condiciones inciales obtenemos $C_1 = 0; \quad C_2 = -1$ de modo que

$$x(t) = -\operatorname{sen}(2t)$$

   y la amplitud, correspondiente a la elongación máxima, es de 1 metro.

   La primera vez que se alcanza es cuando $\operatorname{sen}(2t) = -1$, lo que corresponde a $t = \dfrac{3\pi}{4}$ segundos.