Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2026

Interrogación 1 MAT1640
PAUTA

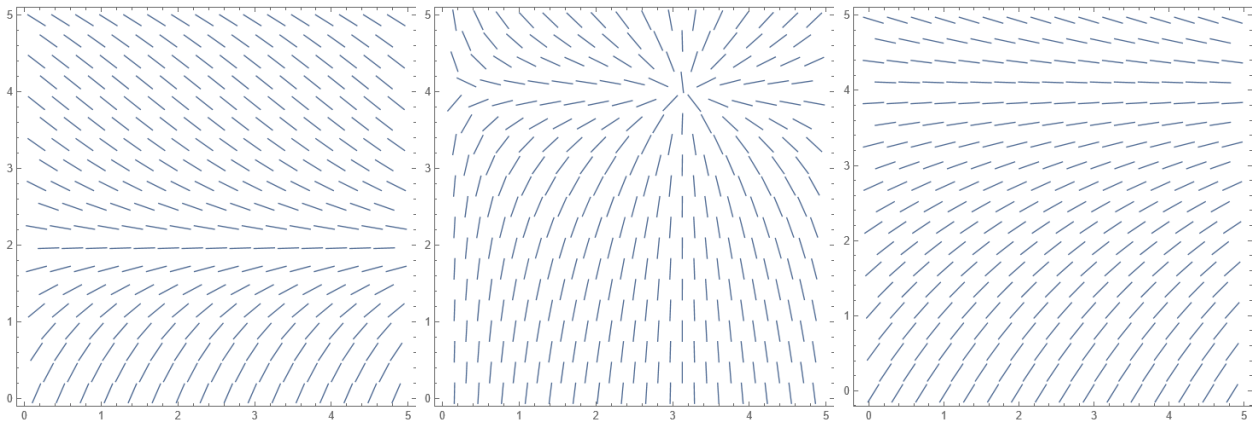
1. El PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{1}{10}\left(5 - \dfrac{1}{5}X(t)\right)\left(3,2 - \dfrac{4}{5}X(t)\right) \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

puede usarse para modelar la cantidad $X(t)$ (en gramos) de un químico C que se obtiene a partir de una reacción quimica donde, comenzado con 5 gramos de un químico A y $3,2$ gramos de un químico B, $0,2$ gramos de A se combinan con $0,8$ gramos de B para formar 1 gramo de C.

a) Use información acerca de la estabilidad de los puntos críticos de la EDO para determinar la cantidad de químico C en el límite cuando $t \to \infty$.

b) Uno de los siguientes campos de pendientes es el campo de pendientes de esta EDO. Utilícelo para estimar la cantidad de químico C en el tiempo $t = 3$.



Una solución:

a) Los puntos críticos de la EDO son $c_1 = 4$ y $c_2 = 25$. Puesto que el lado derecho de la EDO es una cuadrática, podemos deducir que la función es negativa exactamente entre los puntos críticos. Luego, c_1 es atractor y c_2 fuente. De acuerdo a la condición inicial, la solución de este PVI comienza en 0, que es menor a c_1. Luego, la solución debiese converger asintóticamente hacia c_1. En conclusión, $X(t)$ converge a 4.

b) El tercer campo de pendientes es el único cuyo comportamiento es coherente con la EDO. Utilizandolo se puede estimar que $X(3) \approx 3$.

Asignación de puntaje:

- Determinar puntos críticos: 1 punto.
- Deducir signos: 1 punto.

- Clasificar: 1 punto.
- Determinar límite: 1 punto.
- Aproximar ($\pm 0{,}25$): 2 puntos.

2. El PVI

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

modela la corriente $i(t)$ de un circuito en serie, al cual se conecta una bateria de 12 volts, y donde la resistencia es de 10 ohms y la inductancia es de $0,5$ henry. Encuentre una solución de este PVI. ¿Puede asegurar que esta solución es la única?. En caso afirmativo, ¿Dónde?. Justifique.

Una solución:

La EDO es lineal. Al reescribir como

$$\frac{di}{dt} + 20i = 24$$

vemos que un factor integrante es

$$\rho(t) = e^{20t}.$$

Luego

$$24e^{20t} = e^{20t}i' + 20e^{20t}i = \frac{d}{dt}\left(e^{20t}i\right) \Rightarrow e^{20t}i = \frac{6}{5}e^{20t} + C \Rightarrow i(t) = \frac{6}{5} + Ce^{-20t}$$

nos da la solución general de la EDO. Para resolver el PVI debemos usar $C = -6/5$ de modo que la solución del PVI es

$$i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}.$$

Puesto que la EDO es lineal, y dado que las funciones constantes son continuas en todo $\mathbb{R}$, por teorema podemos garantizar que esta es la única solución en todo $\mathbb{R}$.

Asignación de puntaje:

- Escribir en forma estandar: 1 punto.
- Determinar factor integrante: 1 punto.
- Obtener solución general: 2 puntos.
- Determinar constante: 0,5 puntos.
- Escribir solución del PVI: 0,5 puntos.
- Usar linealidad y continuidad para justificar unicidad en $\mathbb{R}$: 1 punto.

3. Encuentre una familia de soluciones para

   a) $xv\dfrac{dv}{dx} + v^2 = 32x$ (puede restringirse al intervalo $x > 0$).

   b) $\operatorname{sen}(y) - y\operatorname{sen}(x) + (\cos(x) + x\cos(y) - y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Una solución:

a) Reescribiendo la EDO como

$$v' + \frac{v}{x} = \frac{32}{v}$$

vemos que es de Bernoulli. Usando $u = v^{1-(-1)} = v^2$ tenemos $u' = 2vv'$ y por lo tanto

$$\frac{u'}{2v} + \frac{v}{x} = \frac{32}{v} \Rightarrow u' + \frac{2}{x}u = 64.$$

Esta nueva EDO es lineal con factor integrante

$$\rho(x) = x^2$$

de modo que

$$u(x) = x^{-2}\int 64x^2 dx = \frac{64}{3}x + \frac{C}{x^2}$$

y entonces obtenemos las familias de soluciones

$$v(x) = \pm\sqrt{\frac{64}{3}x + \frac{C}{x^2}}.$$

b) Puesto que

$$\partial_y\left(\operatorname{sen}(y) - y\operatorname{sen}(x)\right) = \cos(y) - \operatorname{sen}(x) = \partial_x\left(\cos(x) + x\cos(y) - y\right)$$

la EDO es exacta. Buscamos $F(x, y)$. Tenemos

$$\partial_x F = \operatorname{sen}(y) - y\operatorname{sen}(x) \Rightarrow F = x\operatorname{sen}(y) + y\cos(x) + g(y)$$

pero

$$\cos(x) + x\cos(y) - y = \partial_y F = x\cos(y) + \cos(x) + g'(y) \Rightarrow g'(y) = -y$$

por lo que podemos tomar $g(y) = -y^2/2$. Luego, tenemos las soluciones implícitas

$$x\operatorname{sen}(y) + y\cos(x) - \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Asignación de puntaje:

- Identificar sustitución adecuada: 1 punto.
- Obtener EDO para nueva variable: 0,5 puntos.
- Resolver EDO: 1 punto.
- Obtener familia de soluciones para variable original (una familia basta): 0,5 puntos.
- Identificar exacta: 1 punto.
- Integrar: 0,5 puntos.
- Derivar: 0,5 puntos.
- Deducir un F: 0,5 puntos.
- Escribir soluciones: 0,5 puntos.

4. Considere el PVI

$$\begin{cases} (3x+3y+2)\dfrac{dy}{dx} = 3x+3y \\ y(0) = b. \end{cases}$$

Para cada $b \in \mathbb{R}$ determine si existe o no una única solución local y, de existir, encuentrela (la solución puede quedar expresada de manera implícita).

Una solución:

Observe que

$$f(x,y) = \frac{3x+3y}{3x+3y+2} = 1 - \frac{2}{3x+3y+2} \quad , \quad \partial_y f(x,y) = \frac{6}{(3x+3y+2)^2}.$$

Vemos entonces que el teorema de Picard garantiza la existencia y unicidad de una solución local para cualquier condición inicial fuera de la recta $3x+3y=-2$. En nuestro caso particular, tenemos entonces existencia y unicidad para

$$3 \cdot 0 + 3b \neq -2 \Rightarrow b \neq -2/3.$$

Por otro lado, si una solución cumpliese que $y(0) = -2/3$ entonces al reemplazar en la EDO tendriamos

$$0 \cdot y'(0) = -2$$

lo cual no es posible. Entonces, para $b = -2/3$ no puede existir solución.

Ahora buscamos soluciones. La sustitución $u = 3x+3y$ transforma la EDO en separable. En efecto $u' = 3+3y'$ y entonces al sustituir en la EDO

$$(u+2)\frac{u'-3}{3} = u \Rightarrow u' = 3 + 3\frac{u}{u+2} = 3\frac{2u+2}{u+2} = 6\frac{u+1}{u+2}.$$

Tenemos entonces, asumiendo $u \neq -1$,

$$\frac{u+2}{u+1}\frac{du}{dx} = 6 \Rightarrow \int \frac{u+2}{u+1}du = \int 6dx \Rightarrow u + \ln|u+1| = 6x + C$$

de donde obtenemos soluciones implícitas

$$3x+3y+\ln|3x+3y+1| = 6x + C.$$

Para resolver el PVI $y(0) = b$ requerimos

$$3b + \ln|3b+1| = C$$

de modo que si $b \neq -1/3$ obtenemos la solución implícita

$$3x+3y+\ln|3x+3y+1| = 6x+3b+\ln|3b+1|.$$

Para el caso $b = -1/3$ volvemos atrás a la restricción $u \neq -1$. En efecto, esta restricción deja fuera la solución constante $u(x) = -1$. Es decir,

$$3x+3y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1+3x}{3}$$

es solución de la EDO original, la cual precisamente satisface $y(0) = -1/3$.

Asignación de puntaje:

- Determinar f y $\partial_y F$: 0,5 puntos
- Determinar donde aplica teorema: 0,5 puntos
- Mostrar caso no existencia: 1 punto
- Usar sustitución adecuada: 0,5 puntos
- Resolver EDO separable: 1 punto
- Volver a variable original: 0,5 puntos
- Resolver PVI: 0,5 puntos
- Observar caso singular: 0,5 puntos
- Encontrar solución singular: 1 punto.