MAT 1640

Pauta Interrogación 2

23 Noviembre 2020

1A. Sea el PVI

$$y^{(2)} + y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Entonces:

(a) $y(1) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$

(b) $y(1) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)}$

(c) $y(1) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$

(d) $y(1) = \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)} + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$

Solución. La ecuación caracteristica es

$$r^2 + r + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} = 0 \;\Rightarrow\; r = \tfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Luego, la solución general es

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} + C_2\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes,}$$

y las condiciones iniciales dan

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) - C_2\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ 1 = C_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) - (1-C_1)\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; 1 = iC_1\sqrt{3} - \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\; C_1 = \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, la solución del PVI es

$$y(x) = \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} + \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x},$$

y

$$y(1) = \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)} + \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

1B. Sea el PVI

$$y^{(2)} + y' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Entonces:

(a) $y(1) = \left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)} + \left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$

(b) $y(1) = \left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)} - \left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$

(c) $y(1) = \left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)} + \left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$

(d) $y(1) = \left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)} + \left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$

Solución. La ecuación caracteristica es

$$r^2 + r + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{7}{4} = 0 \;\Rightarrow\; r = \tfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Luego, la solución general es

$$y(x) = C_1 \, \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)x} + C_2 \, \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)x}, \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes},$$

y las condiciones iniciales dan

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right) - C_2 \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ 1 = C_1\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right) - (1 - C_1)\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow\; 1 = iC_1\sqrt{7} - \tfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$$
$$\Rightarrow\; C_1 = \tfrac{1}{2} - i\sqrt{\tfrac{9}{14}}.$$

Entonces, la solución del PVI es

$$y(x) = \left(\tfrac{1}{2} - i\sqrt{\tfrac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)x} + \left(\tfrac{1}{2} + i\sqrt{\tfrac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)x},$$

y

$$y(1) = \left(\tfrac{1}{2} - i\sqrt{\tfrac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)} + \left(\tfrac{1}{2} + i\sqrt{\tfrac{9}{14}}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}.$$

2A. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son **ciertas**?

(1) Si $z = z(x)$ es una solución compleja de $y^{(3)} - 2y'' + 2y' = 0$, entonces $y(x) := \mathrm{Re}[z] + \mathrm{Im}[z]$ es una solución real de la misma ecuación.

(2) El Wronskiano de dos funciones diferenciables y linealmente independientes en algun intervalo I siempre toma valores diferentes de 0 en I.

(3) Si y_1 e y_2 son soluciones de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ (x en un intervalo), entonces $y := (y_1 + y_2)/2$ también es solución de la misma ecuación.

(4) Si y_1 e y_2 son dos soluciones de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ en todo $\mathbb{R}$, donde $a(x), b(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$ y el Wronskiano $W_{y_1,y_2}(1) = 0$, entonces $W_{y_1,y_2}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) (1), (3) y (4)

(b) (2) y (4)

(c) (2), (3) y (4)

(d) (1), (2) y (3)

Solución. (1) es **cierta**. Sea L el operador diferencial asociado a la ecuación. Por la linealidad de L, tenemos

$$0 = Lz = L(\mathrm{Re}[z] + i\mathrm{Im}[z]) = L(\mathrm{Re}[z]) + iL(\mathrm{Im}[z]).$$

Pero los coeficientes de L son reales, entonces tanto $L(\mathrm{Re}[z])$ como $L(\mathrm{Im}[z])$ tienen valores en los reales, así que la igualdad arriba es válida si y solo si $L(\mathrm{Re}[z]) = 0 = L(\mathrm{Im}[z])$. Entonces, $\mathrm{Re}[z]$ y $\mathrm{Im}[z]$ son soluciones reales de la ecuación homogénea, y por el Principio de Superposición, también lo es $y := \mathrm{Re}[z] + \mathrm{Im}[z]$.

(2) es **falsa**. Considere $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x^2$, definidas en $I = \mathbb{R}$. Las dos funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ ya que

$$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2x^2 \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; c_1 = c_2 = 0.$$

Sin embargo, el Wronskiano $W_{y_1,y_2}(x) = \left(\begin{smallmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{smallmatrix}\right) = x^2$ toma valor 0 en $x = 0$.

(3) es **cierta**. Por el Principio de Superposición, $y := (y_1 + y_2)/2$ resuelve la ecuación

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(x) = f(x).$$

(4) es **cierta**. Ya que los coeficientes de la ecuación lineal homogénea son continuos en $I = \mathbb{R}$, podemos aplicar el resultado visto en clases que dice que si el Wronskiano $W_{y_1,y_2}(x_0) = 0$ de dos soluciones y_1, y_2 se anula en $x_0 \in I$ (en este caso $x_0 = 1$), entonces y_1 e y_2 son linealmente dependientes en $I = \mathbb{R}$. Por lo tanto, $W_{y_1,y_2}(x) \equiv 0$.

2B. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son **ciertas**?

(1) Si $z = z(x)$ es una solución compleja de $y^{(3)} - 4y'' + 5y' = 0$, entonces $2z + \bar{z}$ es otra solución compleja de la misma ecuación ($\bar{z}$ denota el complejo conjugado de z).

(2) Si el Wronskiano de dos funciones y_1, y_2 diferenciables en un intervalo I tiene valor distinto de 0 en algún punto de I, entonces y_1 e y_2 son linealmente independientes en I.

(3) Si y_1, y_2 son dos soluciones de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ en el intervalo I, con $f(x) \neq 0$ en I, entonces $y := y_1 + y_2$ también es solución de la misma ecuación.

(4) Si y_1 e y_2 son dos soluciones de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ en todo $\mathbb{R}$, donde $a(x), b(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$ y el Wronskiano $W_{y_1,y_2}(1) \neq 0$, entonces $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) (1), (2) y (4)

(b) (2) y (4)

(c) (2), (3) y (4)

(d) (1), (2) y (3)

Solución. (1) es **cierta**. Sea L el operador diferencial asociado a la ecuación. Al tomar el conjugado de la ecuación $Lz = 0$, vemos que

$$0 = \bar{0} = \overline{Lz}.$$

Pero los coeficientes de L son reales, entonces $\overline{Lz} = L\bar{z}$, y $\bar{z}$ es otra solución (compleja) de la ecuación. Ahora, por el Principio de Superposición, concluimos que $2z + \bar{z}$ también lo es.

(2) es **cierta** y es precisamente el Criterio de Independencia Lineal de dos funciones visto en clases.

(3) es **falsa**. Por el Principio de Superposición, $y := y_1 + y_2$ resuelve la ecuación

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) + f(x) = 2f(x) \neq f(x),$$

pues $f(x) \neq 0$ en I.

(4) es **cierta**. Ya que los coeficientes de la ecuación lineal homogénea son continuos en $I = \mathbb{R}$, podemos aplicar el resultado visto en clases que dice que si el Wronskiano $W_{y_1,y_2}(x_0) = 0$ de dos soluciones y_1, y_2 se anulara en algún $x_0 \in I$, entonces y_1 e y_2 serían linealmente dependientes en $I = \mathbb{R}$ y $W_{y_1,y_2} \equiv 0$. Como $W_{y_1,y_2}(1) \neq 0$, esto es imposible, i.e. $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3A. Cuál es la solución general de la ecuación siguiente?

$$y^{(4)} + 5y^{(2)} + 4y = 0.$$

(a) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + C_3\,\mathrm{e}^{x} + C_4\,\mathrm{e}^{-x}$ con C_i constantes

(b) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2ix} + C_2\,\mathrm{e}^{-2ix} + C_3\,\mathrm{e}^{x} + C_4\,\mathrm{e}^{-x}$ con C_i constantes

(c) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + C_3\,\mathrm{e}^{ix} + C_4\,\mathrm{e}^{-ix}$ con C_i constantes

(d) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2ix} + C_2\,\mathrm{e}^{-2ix} + C_3\,\mathrm{e}^{ix} + C_4\,\mathrm{e}^{-ix}$ con C_i constantes

Solución. La ecuación caracteristica es $r^4 + 5r^2 + 4 = 0$, lo que da con el cambio de variable $R = r^2$:

$$\begin{aligned} R^2 + 5R + 4 = 0 &\Leftrightarrow \left(R + \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow R = \tfrac{-5\pm 3}{2} \\ &\Rightarrow r = 2i,\ r = -2i,\ r = i,\ r = -i. \end{aligned}$$

Entonces, la solución general es

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2ix} + C_2\,\mathrm{e}^{-2ix} + C_3\,\mathrm{e}^{ix} + C_4\,\mathrm{e}^{-ix} \quad \text{con } C_i \text{ constantes.}$$

3B. Cuál es la solución general de la ecuación siguiente?

$$y^{(4)} + 5y^{(2)} + 6y = 0.$$

(a) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{xi\sqrt{2}} + C_2\,\mathrm{e}^{-xi\sqrt{2}} + C_3\,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} + C_4\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}$ con C_i constantes

(b) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x\sqrt{2}} + C_2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}} + C_3\,\mathrm{e}^{xi\sqrt{3}} + C_4\,\mathrm{e}^{-xi\sqrt{3}}$ con C_i constantes

(c) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{xi\sqrt{2}} + C_2\,\mathrm{e}^{-xi\sqrt{2}} + C_3\,\mathrm{e}^{xi\sqrt{3}} + C_4\,\mathrm{e}^{-xi\sqrt{3}}$ con C_i constantes

(d) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x\sqrt{2}} + C_2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}} + C_3\,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} + C_4\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}$ con C_i constantes

Solución. La ecuación caracteristica es $r^4 + 5r^2 + 6 = 0$, lo que da con el cambio de variable $R = r^2$:

$$\begin{aligned} R^2 + 5R + 6 = 0 &\Leftrightarrow \left(R + \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow R = \tfrac{-5\pm 1}{2} \\ &\Rightarrow r = i\sqrt{2},\ r = -i\sqrt{2},\ r = i\sqrt{3},\ r = -i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Entonces, la solución general es

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{xi\sqrt{2}} + C_2\,\mathrm{e}^{-xi\sqrt{2}} + C_3\,\mathrm{e}^{xi\sqrt{3}} + C_4\,\mathrm{e}^{-xi\sqrt{3}} \quad \text{con } C_i \text{ constantes.}$$

4A. Cuál de las siguientes expresiones da una solución de la ecuación

$$y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = x\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$$

para ciertos valores de las constantes A_i, B_i?

(a) $(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)\,\mathrm{e}^{x} + (B_0 + B_1x + B_2x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$

(b) $(A_2x^2 + A_3x^3)\,\mathrm{e}^{x} + (B_0 + B_1x)\,\mathrm{e}^{-x}$

(c) $(A_0 + A_1x + A_2x^2)\,\mathrm{e}^{x} + (B_0 + B_1x)\,\mathrm{e}^{-x}$

(d) $(A_0 + A_1x)\,\mathrm{e}^{x} + B_0\,\mathrm{e}^{-x}$

Solución. Sea $L := D^4 - 2D^2 + 1$. La ecuación homogénea asociada al problema es $Ly = 0$, y la ecuación característica es

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ (r-1)^2(r+1)^2 = 0,$$

la cual tiene raices $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, cada una de multiplicidad 2. Entonces la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h = (A_0 + A_1x)\,\mathrm{e}^{x} + (B_0 + B_1x)\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{con } A_0, A_1, B_0, B_1 \text{ cualesquiera constantes.}$$

Consideremos la ecuación no homogénea $Ly = x\,\mathrm{e}^x$. Ya que $r = 1$ tiene multiplicidad 2, el método de Coeficientes Indeterminados nos dice que la forma de una solución particular de esta ecuación es:

$$y_1 = x^2(A_2 + A_3x)\,\mathrm{e}^x = (A_2x^2 + A_3x^3)\,\mathrm{e}^x \quad \text{para ciertas constantes } A_2, A_3.$$

Similarmente, si consideramos la ecuación no homogénea $Ly = \mathrm{e}^{-x}$, en vista del hecho que $r = -1$ tiene multiplicidad 2, una solución particular tendrá la forma

$$y_2 = x^2B_2\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{para alguna constante } B_2.$$

Ahora, el Principio de Superposición nos dice que la solución general de la ecuación original será:

$$y = y_h + y_1 + y_2 = (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)\,\mathrm{e}^x + (B_0 + B_1x + B_2x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

para algunas constantes A_2, A_3, B_2 y cualesquiera A_0, A_1, B_0, B_1. Haciendo las calculaciones estándares se puede llegar a la formula exacta:

$$y = (A_0 + A_1x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3)\,\mathrm{e}^x + (B_0 + B_1x + \tfrac{1}{8}x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

4B. Cuál de las siguientes expresiones da una solución de la ecuación

$$y^{(4)} - 8y^{(2)} + 16y = x^2\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$$

para ciertos valores de las constantes A_i, B_i, C_i?

(a) $(A_0 + A_1x + A_2x^2)\,\mathrm{e}^x + (B_0 + B_1x + B_2x^2)\,\mathrm{e}^{2x} + (C_0 + C_1x)\,\mathrm{e}^{-2x}$

(b) $A_2x^2\,\mathrm{e}^x + (B_0 + B_1x)\,\mathrm{e}^{2x} + C_0\,\mathrm{e}^{-2x}$

(c) $(A_0 + A_1x + A_2x^2)\,\mathrm{e}^x + (B_0 + B_1x)\,\mathrm{e}^{2x} + C_0\,\mathrm{e}^{-2x}$

(d) $(A_0 + A_1x + A_2x^2)x^2\,\mathrm{e}^x + B_0\,\mathrm{e}^{2x} + (C_0 + C_1x)\,\mathrm{e}^{-2x}$

Solución. Sea $L := D^4 - 8D^2 + 16$. La ecuación homogénea asociada al problema es $Ly = 0$, y la ecuación característica es

$$r^4 - 8r^2 + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r-2)^2(r+2)^2 = 0,$$

la cual tiene raices $r_1 = 2$, $r_2 = -2$, cada una de multiplicidad 2. Entonces la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h = (B_0 + B_1x)\,\mathrm{e}^{2x} + (C_0 + C_1x)\,\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{con } B_0, B_1, C_0, C_1 \text{ cualesquiera constantes.}$$

Consideremos la ecuación no homogénea $Ly = x^2\,\mathrm{e}^x$. Ya que $r = 1$ no es raíz de la ecuación característiva (o tiene "multiplicidad 0"), el método de Coeficientes Indeterminados nos dice que la forma de una solución particular de esta ecuación es:

$$y_1 = (A_0 + A_1x + A_2x^2)\,\mathrm{e}^x \quad \text{para algunas constantes } A_0, A_1, A_2.$$

Ahora, para la ecuación no homogénea $Ly = \mathrm{e}^{2x}$, dado que $r = 2$ tiene multiplicidad 2, una solución particular tendrá la forma

$$y_2 = B_2x^2\,\mathrm{e}^{2x} \quad \text{para alguna constante } B_2.$$

Ahora, el Principio de Superposición nos dice que la solución general de la ecuación original será:

$$y = y_h + y_1 + y_2 = (A_0 + A_1x + A_2x^2)\,\mathrm{e}^x + (B_0 + B_1x + B_2x^2)\,\mathrm{e}^{2x} + (C_0 + C_1x)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

para algunas constantes A_0, A_1, A_2, B_2 y cualesquiera B_0, B_1, C_0, C_1. Haciendo las calculaciones estándares se puede llegar a la formula exacta:

$$y = (\tfrac{4}{9} + \tfrac{8}{27}x + \tfrac{1}{9}x^2)\,\mathrm{e}^x + (B_0 + B_1x + \tfrac{1}{32}x^2)\,\mathrm{e}^{2x} + (C_0 + C_1x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

5A. En el año 2467, la Tierra está invadida por 200 robots extraterrestres. Sabiendo que el número $n(t)$ de robots ocupando la Tierra en el año t obedece a la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = n^3(n^2 - 400n + 30000),$$

determinar $\lim_{t\to\infty} n(t)$.

(a) $\lim_{t\to\infty} n(t) = -100$

(b) $\lim_{t\to\infty} n(t) = 0$

(c) $\lim_{t\to\infty} n(t) = 100$

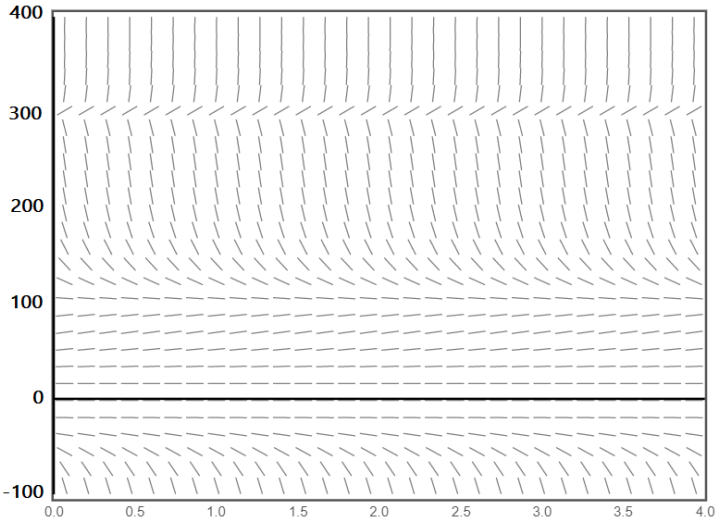
(d) $\lim_{t\to\infty} n(t) = 300$

(e) $\lim_{t\to\infty} n(t) = 400$

Solución. La ecuación tiene la forma

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = n^3(n^2 - 400n + 30000) = n^3(n - 300)(n - 100).$$

Luego, $n(t) \equiv 0$, $n(t) \equiv 100$ y $n(t) \equiv 300$ son soluciones de equilibrio, y el campo de pendientes es



https://homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html

Entonces, si la condición inicial es $n(2467) = 200$, inferimos que $\lim_{t\to\infty} n(t) = 100$.

5B. En el año 2645, la Tierra está invadida por 150 conejos caníbales. Sabiendo que el número $n(t)$ de conejos ocupando la Tierra en el año t obedece a la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = n^3(n^2 - 500n + 60000),$$

determinar $\lim_{t\to\infty} n(t)$.

(a) $\lim_{t\to\infty} n(t) = -100$

(b) $\lim_{t\to\infty} n(t) = 0$

(c) $\lim_{t\to\infty} n(t) = 200$

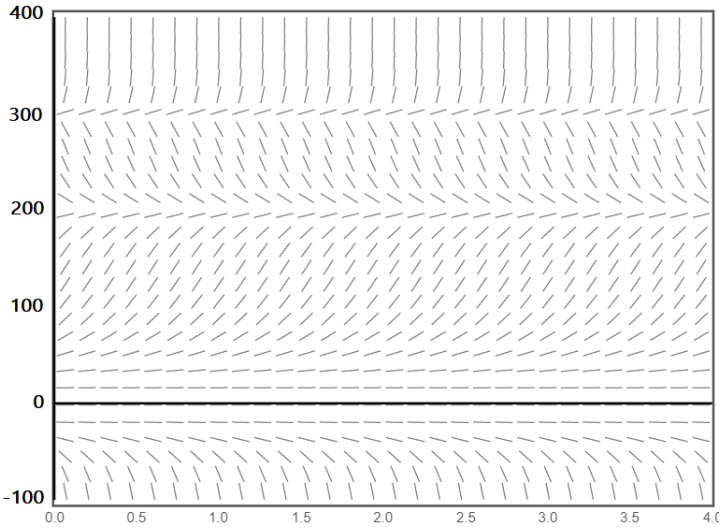
(d) $\lim_{t\to\infty} n(t) = 300$

(e) $\lim_{t\to\infty} n(t) = 400$

Solución. La ecuación tiene la forma

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = n^3(n^2 - 500n + 60000) = n^3(n-300)(n-200).$$

Luego, $n(t) \equiv 0$, $n(t) \equiv 200$ y $n(t) \equiv 300$ son soluciones de equilibrio, y el campo de pendientes es



https://homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html

Entonces, si la condición inicial es $n(2645) = 150$, inferimos que $\lim_{t\to\infty} n(t) = 200$.

6A. Considere la ecuación no homogénea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 1, \quad x \in (0,\infty),$$

donde $a(x), b(x)$ son funciones continuas en $(0,\infty)$. Asumiendo que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^{-1}$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada en $(0,\infty)$, y que $y(x)$ es cualquier solución de la ecuación no homogénea en $(0,\infty)$, entonces el $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^2}$ es igual a:

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) no existe

(e) depende de la solución $y(x)$

Solución. Apliquemos el método de Variación de Constantes para encontrar una solución particular de la forma $y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$. El Wronskiano de las dos soluciones de la ecuación homogénea es

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -2x^{-1} \neq 0, \quad x \in (0,\infty),$$

entonces y_1 e y_2 son linealmente independientes en $(0,\infty)$. Tomando en cuenta la no-homogeneidad $f = 1$, la formula de variación de constantes nos da:

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{W_{y_1,y_2}}\,dx = -\int \frac{x^{-1}}{-2x^{-1}}\,dx = \frac{x}{2}$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 f}{W_{y_1,y_2}}\,dx = \int \frac{x}{-2x^{-1}}\,dx = -\frac{x^3}{6}.$$

Obtenemos

$$y_p(x) = \tfrac{x}{2}y_1 - \tfrac{x^3}{6}y_2 = \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^2}{6} = \tfrac{x^2}{3},$$

así que la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2 = \tfrac{x^2}{3} + c_1x + c_2x^{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

De aquí concluimos que

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{y(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{c_1}{x} + \tfrac{c_2}{x^3}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

6B. Considere la ecuación no homogénea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 1, \quad x \in (0,\infty),$$

donde $a(x), b(x)$ son funciones continuas en $(0,\infty)$. Asumiendo que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^{-2}$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada en $(0,\infty)$, y que $y(x)$ es cualquier solución de la ecuación no homogénea en $(0,\infty)$, entonces el $\lim\limits_{x\to\infty} \tfrac{y(x)}{x^2}$ es igual a:

(a) 0

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) no existe

(e) depende de la solución $y(x)$

Solución. Apliquemos el método de Variación de Constantes para encontrar una solución particular de la forma $y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$. El Wronskiano de las dos soluciones de la ecuación homogénea es

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-2} \\ 1 & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -3x^{-2} \neq 0, \quad x \in (0,\infty),$$

entonces y_1 e y_2 son linealmente independientes en $(0,\infty)$. Tomando en cuenta la no-homogeneidad $f = 1$, la formula de variación de constantes nos da:

$$u_1 = -\int \tfrac{y_2 f}{W_{y_1,y_2}}\,dx = -\int \tfrac{x^{-2}}{-3x^{-2}}\,dx = \tfrac{x}{3}$$
$$u_2 = \int \tfrac{y_1 f}{W_{y_1,y_2}}\,dx = \int \tfrac{x}{-3x^{-2}}\,dx = -\tfrac{x^4}{12}.$$

Obtenemos

$$y_p(x) = \tfrac{x}{3}y_1 - \tfrac{x^4}{12}y_2 = \tfrac{x^2}{3} - \tfrac{x^2}{12} = \tfrac{x^2}{4},$$

así que la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2 = \tfrac{x^2}{4} + c_1x + c_2x^{-2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

De aquí concluimos que

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{y(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{c_1}{x} + \tfrac{c_2}{x^4}\right) = \tfrac{1}{4}.$$

7A. Determinar la solución general del sistema lineal

$$\begin{aligned} 2y_1' - 8y_1 - 2y_2 &= 0 \\ y_2' - 6y_1 + y_2 &= 0. \end{aligned}$$

(a) $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$ con c_1, c_2 constantes

(b) $c_1\binom{1}{6}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\binom{1}{1}\mathrm{e}^{5t}$ con c_1, c_2 constantes

(c) $c_1\binom{1}{-6}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\binom{-1}{1}\mathrm{e}^{5t}$ con c_1, c_2 constantes

(d) $c_1\binom{1}{-6}\mathrm{e}^{2t}+c_2\binom{1}{1}\mathrm{e}^{-5t}$ con c_1, c_2 constantes

(e) $c_1\binom{1}{6}\mathrm{e}^{2t}+c_2\binom{1}{1}\mathrm{e}^{-5t}$ con c_1, c_2 constantes

(f) $c_1\binom{1}{-6}\mathrm{e}^{2t}+c_2\binom{-1}{1}\mathrm{e}^{-5t}$ con c_1, c_2 constantes

Solución. Haciendo el cambio de variables $(x_1, x_2) := (2y_1, y_2)$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' - 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2' - 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - x_2. \end{cases}$$

Este sistema tiene soluciones linealmente independientes (página 307 del libro guía):

$$\vec{x}_1(t) = \binom{1}{-3}\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{y} \quad \vec{x}_2(t) = \binom{2}{1}\mathrm{e}^{5t},$$

lo que da en las variables iniciales

$$\vec{y}_1(t) = \binom{1/2}{-3}\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{y} \quad \vec{y}_2(t) = \binom{1}{1}\mathrm{e}^{5t}.$$

Entonces la solución general del sistema lineal es

$$c_1\binom{1/2}{-3}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\binom{1}{1}\mathrm{e}^{5t} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ constantes},$$

lo cual es quivalente a

$$c_1\binom{1}{-6}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\binom{1}{1}\mathrm{e}^{5t} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ constantes}.$$

7B. Determinar la solución general del sistema lineal

$$\begin{aligned} 3y_1' - 12y_1 - 2y_2 &= 0 \\ y_2' - 9y_1 + y_2 &= 0. \end{aligned}$$

(a) $c_1\binom{1}{-9}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\binom{2}{3}\mathrm{e}^{5t}$ con c_1, c_2 constantes

(b) $c_1\binom{1}{9}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\binom{2}{3}\mathrm{e}^{5t}$ con c_1, c_2 constantes

(c) $c_1\binom{1}{-9}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\binom{-2}{3}\mathrm{e}^{5t}$ con c_1, c_2 constantes

(d) $c_1\binom{1}{-9}\mathrm{e}^{2t}+c_2\binom{2}{3}\mathrm{e}^{-5t}$ con c_1, c_2 constantes

(e) $c_1\binom{1}{9}\mathrm{e}^{2t}+c_2\binom{2}{3}\mathrm{e}^{-5t}$ con c_1, c_2 constantes

(f) $c_1\binom{1}{-9}\mathrm{e}^{2t}+c_2\binom{-2}{3}\mathrm{e}^{-5t}$ con c_1, c_2 constantes

Solución. Haciendo el cambio de variables $(x_1, x_2) := (3y_1, y_2)$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' - 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2' - 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - x_2. \end{cases}$$

Este sistema tiene soluciones linealmente independientes (página 307 del libro guía):

$$\vec{x}_1(t) = \binom{1}{-3}\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{y} \quad \vec{x}_2(t) = \binom{2}{1}\mathrm{e}^{5t},$$

lo que da en las variables iniciales

$$\vec{y}_1(t) = \binom{1/3}{-3}\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{y} \quad \vec{y}_2(t) = \binom{2/3}{1}\mathrm{e}^{5t}.$$

Entonces la solución general del sistema lineal es

$$c_1\begin{pmatrix}1/3\\-3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}2/3\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{5t}\quad\text{con } c_1,c_2 \text{ constantes,}$$

lo cual es quivalente a

$$c_1\begin{pmatrix}1\\-9\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{5t}\quad\text{con } c_1,c_2 \text{ constantes.}$$

8A. Considere el sistema lineal homogéneo $\vec{x}' = A\vec{x}$, donde A es una matriz 3×3 de coeficientes constantes que satisface lo siguiente:

1. la ecuación característica de A es $(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$;
2. $A\vec{v}=-\vec{v}$;
3. $A\vec{w}=\vec{w}$;
4. $A\vec{z}=2\vec{w}+\vec{z}$

para ciertos vectores no nulos $\vec{v},\vec{w},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$. Entonces la solución general del sistema es:

(a) $c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}+c_3(t\vec{w}+\vec{z})\,\mathrm{e}^{t}$

(b) $c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}+c_3(\vec{v}+t\vec{z})\,\mathrm{e}^{t}$

(c) $c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}+c_3\big(t\vec{w}+\frac{1}{2}\vec{z}\big)\,\mathrm{e}^{t}$

(d) $c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}+c_3(2\vec{w}+t\vec{z})\,\mathrm{e}^{t}$

con c_1,c_2,c_3 constantes.

Solución. De las condiciones 1-3 deducimos que A tiene valor propio $\lambda=-1$ de multiplicidad 1 con vector propio $\vec{v}$ y $\lambda=1$ de multiplicidad 2 con vector propio $\vec{w}$. Entonces, $\lambda=-1$ conlleva la solución $\vec{x}_1(t):=\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}$, mientras que $\lambda=1$ da la solución $\vec{x}_2(t):=\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}$. Dado que $\lambda=1$ tiene multiplicidad 2, falta encontrar un vector propio generalizado $\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ que satisface $(A-I)\vec{y}=\vec{w}$. De la condición 4 inferimos

$$(A-I)\vec{z}=2\vec{w}\quad\Rightarrow\quad(A-I)\vec{y}=\vec{w}\quad\text{para}\quad\vec{y}=\tfrac{1}{2}\vec{z}.$$

Por el metodo de valores propios, concluimos que $\vec{x}_3(t):=(t\vec{w}+\vec{y})\,\mathrm{e}^{t}=\big(t\vec{w}+\frac{1}{2}\vec{z}\big)\,\mathrm{e}^{t}$ es otra solución del sistema, linealmente independiente de $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$. La solución general del sistema es entonces

$$\vec{x}(t)=c_1\vec{x}_1(t)+c_2\vec{x}_2(t)+c_3\vec{x}_3(t)=c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}+c_3\big(t\vec{w}+\tfrac{1}{2}\vec{z}\big)\,\mathrm{e}^{t}$$

con c_1,c_2,c_3 constantes.

8B. Considere el sistema lineal homogéneo $\vec{x}' = A\vec{x}$, donde A es una matriz 3×3 de coeficientes constantes que satisface lo siguiente:

1. la ecuación característica de A es $(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$;
2. $A\vec{v}=-\vec{v}$;
3. $A\vec{w}=\vec{w}$;
4. $A\vec{z}=-2\vec{v}-\vec{z}$

para ciertos vectores no nulos $\vec{v},\vec{w},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$. Entonces la solución general del sistema es:

(a) $c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}+c_3\big(t\vec{w}+\frac{1}{2}\vec{z}\big)\,\mathrm{e}^{t}$

(b) $c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}+c_3(\vec{v}+t\vec{z})\,\mathrm{e}^{-t}$

(c) $c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t}+c_3\big(t\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{z}\big)\,\mathrm{e}^{-t}$

(d) $c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t} + c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t} + c_3(2\vec{v} - t\vec{z})\,\mathrm{e}^{t}$

con c_1, c_2, c_3 constantes.

Solución. De las condiciones 1-3 deducimos que A tiene valor propio $\lambda = -1$ de multiplicidad 2 con vector propio $\vec{v}$ y $\lambda = 1$ de multiplicidad 1 con vector propio $\vec{w}$. Entonces, $\lambda = -1$ conlleva la solución $\vec{x}_1(t) := \vec{v}\,\mathrm{e}^{-t}$, mientras que $\lambda = 1$ da la solución $\vec{x}_2(t) := \vec{w}\,\mathrm{e}^{-t}$. Dado que $\lambda = -1$ tiene multiplicidad 2, falta encontrar encontrar un vector propio generalizado $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ que satisface $(A + I)\vec{y} = \vec{v}$. De la condición 4 inferimos

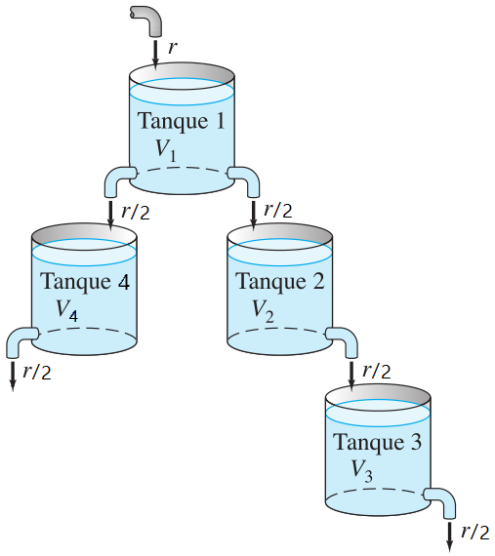
$$(A + I)\vec{z} = -2\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A + I)\vec{y} = \vec{v} \quad \text{para} \quad \vec{y} = -\tfrac{1}{2}\vec{z}.$$

Por el metodo de valores propios, concluimos que $\vec{x}_3(t) := (t\vec{v} + \vec{y})\,\mathrm{e}^{t} = \big(t\vec{v} - \tfrac{1}{2}\vec{z}\big)\,\mathrm{e}^{t}$ es otra solución del sistema, linealmente independiente de $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$. La solución general del sistema es entonces

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + c_3\vec{x}_3(t) = c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{-t} + c_2\vec{w}\,\mathrm{e}^{t} + c_3\big(t\vec{v} - \tfrac{1}{2}\vec{z}\big)\,\mathrm{e}^{-t}$$

con c_1, c_2, c_3 constantes.

9A. Hay cuatro tanques de salmuera, de volumenes V_1, V_2, V_3, V_4. Agua fresca fluye hacia el tanque 1. Salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hacia los tanques 2 y 4. Salmuera mezclada fluye desde el tanque 2 hacia el tanque 3. Finalmente, salmuera mezclada sale desde los tanques 3 y 4.



Si $x_i(t)$ es la cantidad de sal en el tanque i en el tiempo t (con $i = 1, 2, 3, 4$) y si las razones de flujo valen r y $r/2$ como en la figura, entonces el sistema de ecuaciones para $\vec{x} := \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big)^{\mathsf{T}}$ es:

(a) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{2V_2} & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & 0 & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}$

(b) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{V_2} & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & 0 & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}$

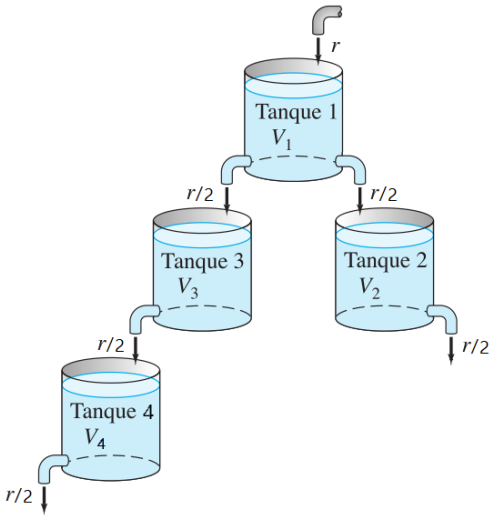
(c) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{2V_2} & 0 & -\frac{r}{2V_3} \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & -\frac{r}{2V_4} & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$

(d) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{2r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{2V_2} & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ \frac{r}{V_1} & 0 & 0 & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}$

Solución. Un conteo directo de la sal que entre y sale de cada tanque proporciona el sistema de ecuaciones

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{2V_2} & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & 0 & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}.$$

9B. Hay cuatro tanques de salmuera, de volumenes V_1, V_2, V_3, V_4. Agua fresca fluye hacia el tanque 1. Salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hacia los tanques 2 y 3. Salmuera mezclada fluye desde el tanque 3 hacia el tanque 4. Finalmente, salmuera mezclada sale desde los tanques 2 y 4.



Si $x_i(t)$ es la cantidad de sal en el tanque i en el tiempo t (con $i = 1, 2, 3, 4$) y si las razones de flujo valen r y $r/2$ como en la figura, entonces el sistema de ecuaciones para $\vec{x} := \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big)^{\mathsf{T}}$ es:

(a) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2V_3} & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}$

(b) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2V_3} & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}$

(c) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{2r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ \frac{r}{V_1} & 0 & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2V_3} & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}$

(d) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & -\frac{r}{2V_2} & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2V_3} & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}$

Solución. Un conteo directo de la sal que entre y sale de cada tanque proporciona el sistema de ecuaciones

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2V_3} & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix} \vec{x}.$$

10A. Determine la solución del PVI

$$\vec{x}' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{smallmatrix}\right)\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

(a) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix}$

(d) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix}$

Solución. La ecuación característica de la matriz $A := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ es:

$$0 = \lambda^2 - (\operatorname{Tr} A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda+1)^2 + 2^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm 2i.$$

Un vector propio (complejo) $\vec{v}$ asociado a $\lambda = -1 + 2i$ pertenece al espacio nulo de

$$A - \lambda I = \left(\begin{smallmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{smallmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2i \end{smallmatrix}\right).$$

De aquí obtenemos la eigensolución compleja

$$\vec{z} := \vec{v}\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2it} \\ 2i\,\mathrm{e}^{2it} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + i\sin 2t \\ 2i\cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + i\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} = \mathrm{Re}[\vec{z}] + i\,\mathrm{Im}[\vec{z}].$$

Ahora, sabemos que la solución general *real* del sistema es

$$\vec{x} = c_1\mathrm{Re}[\vec{z}] + c_2\mathrm{Im}[\vec{z}] = c_1\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para determinar c_1 y c_2, usamos la condición inicial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1, c_2 = 1/2,$$

así que la solución del PVI es

$$\vec{x} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}.$$

10B. Determine la solución del PVI

$$\vec{x}' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right).$$

(a) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t - \sin 2t \\ 2\cos 2t + 4\sin 2t \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t + \sin 2t \\ 2\cos 2t - 4\sin 2t \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t - \sin 2t \\ 2\cos 2t + 4\sin 2t \end{pmatrix}$

(d) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t + \sin 2t \\ 2\cos 2t - 4\sin 2t \end{pmatrix}$

Solución. La ecuación característica de la matriz $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es:

$$0 = \lambda^2 - (\operatorname{Tr} A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda-1)^2 + 2^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm 2i.$$

Un vector propio (complejo) $\vec{v}$ asociado a $\lambda = 1 + 2i$ pertenece al espacio nulo de

$$A - \lambda I = \left(\begin{smallmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{smallmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2i \end{smallmatrix}\right).$$

De aquí obtenemos la eigensolución compleja

$$\vec{z} := \vec{v}\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2it} \\ -2i\,\mathrm{e}^{2it} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ -2i\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} + i\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix} = \mathrm{Re}[\vec{z}] + i\,\mathrm{Im}[\vec{z}].$$

Ahora, sabemos que la solución general *real* del sistema es

$$\vec{x} = c_1 \mathrm{Re}[\vec{z}] + c_2 \mathrm{Im}[\vec{z}] = c_1\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para determinar c_1 y c_2, usamos la condición inicial:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2, c_2 = -1,$$

así que la solución del PVI es

$$\vec{x} = 2\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} + (-1)\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2\cos 2t - \sin 2t \\ 2\cos 2t + 4\sin 2t \end{pmatrix}.$$

11A. La solución del PVI

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es:

(a) $\exp\left((t-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\exp\left((1-t)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\exp\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución. La función vectorial

$$y(t) := \exp\left((t-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verifica

$$\frac{d}{dt}\,y(t) = \frac{d(t-1)}{dt}\frac{d}{d(t-1)}\,y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} y(t) \quad \text{y} \quad y(1) = \exp\left(0\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} 0^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, por el teorema de existencia e unicidad, $y(t)$ es la solución del PVI.

11B. La solución del PVI

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

es:

(a) $\exp\left((t-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\exp\left((2-t)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\exp\begin{pmatrix} 1&2&1&2\\ 1&3&1&3\\ 1&4&1&4\\ 1&5&1&5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\2\\2\\2 \end{pmatrix}$

Solución. La función vectorial

$$y(t) := \exp\left((t-2)\begin{pmatrix} 1&2&1&2\\ 1&3&1&3\\ 1&4&1&4\\ 1&5&1&5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2\\2\\2\\2 \end{pmatrix}$$

verifica

$$\tfrac{d}{dt}\,y(t) = \tfrac{d(t-2)}{dt}\tfrac{d}{d(t-2)}\,y(t) = \begin{pmatrix} 1&2&1&2\\ 1&3&1&3\\ 1&4&1&4\\ 1&5&1&5 \end{pmatrix} y(t) \quad \text{y} \quad y(2) = \exp\left(0\begin{pmatrix} 1&2&1&2\\ 1&3&1&3\\ 1&4&1&4\\ 1&5&1&5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2\\2\\2\\2 \end{pmatrix} = \sum_{k\geq 0}\tfrac{1}{k!}0^k\begin{pmatrix} 2\\2\\2\\2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\2\\2\\2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, por el teorema de existencia e unicidad, $y(t)$ es la solución del PVI.

12A. Considere un sistema masa-resorte-amortiguador no forzado con los siguientes parámetros:

masa = 2 [kg], constante de resorte = 16 [N/m], constante de amortiguación = 8 [kg/s].

Suponga que en el tiempo $t = 0$ la masa está en la posición de equilibrio $x = 0$ y se mueve con velocidad no nula. Cuál es el valor de t cuándo la masa regresa por primera vez a su posición de equilibrio?

(a) $t = \frac{\pi}{2}$ [s]

(b) $t = \pi$ [s]

(c) $t = \frac{1}{4}$ [s]

(d) la masa nunca regresa a su posición de equilibrio.

Solución. Sea $x(t)$ la posición (en metros) de la masa en el tiempo t [s]. La ecuación para $x(t)$ es $mx'' + cx' + kx = 0$, con $m = 2$, $c = 8$ y $k = 16$. Entonces $x(t)$ satisface la EDO lineal homogénea

$$2x'' + 8x' + 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 4x' + 8x = 0,$$

cuya ecuación característica $0 = \lambda^2 + 4\lambda + 8 = (\lambda+2)^2 + 2^2$ tiene raíces $\lambda = -2 \pm 2i$. Entonces la solución general de la EDO es

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{(-2+2i)t} + c_2\,\mathrm{e}^{(-2-2i)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Sea $v_0 \neq 0$ la velocidad inicial de la masa. Tomando en cuenta la condición inicial, tenemos

$$\begin{cases} 0 = x(0) = c_1 + c_2 \\ v_0 = x'(0) = c_1(-2+2i) + c_2(-2-2i) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = -c_2 = \tfrac{v_0}{4i}.$$

Luego,

$$x(t) = \tfrac{v_0}{4i}\,\mathrm{e}^{(-2+2i)t} - \tfrac{v_0}{4i}\,\mathrm{e}^{(-2-2i)t} = \tfrac{v_0}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\,\tfrac{\mathrm{e}^{2it} - \mathrm{e}^{-2it}}{2i} = \tfrac{v_0}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t,$$

y entonces la masa regresa por primera vez a su posición $x = 0$ cuando $2t = \pi$, i.e. $t = \frac{\pi}{2}$ [s].

12B. Considere un sistema masa-resorte-amortiguador no forzado con los siguientes parámetros:

masa = 2 [kg], constante de resorte = 20 [N/m], constante de amortiguación = 4 [kg/s].

Suponga que en el tiempo $t = 0$ la masa está en la posición de equilibrio $x = 0$ y se mueve con velocidad no nula. Cuál es el valor de t cuándo la masa regresa por primera vez a su posición de equilibrio?

(a) $t = \frac{\pi}{3}$ [s]

(b) $t = \pi$ [s]

(c) $t = \frac{1}{2}$ [s]

(d) la masa nunca regresa a su posición de equilibrio.

Solución. Sea $x(t)$ la posición (en metros) de la masa en el momento t [s]. La ecuación para $x(t)$ es $mx'' + cx' + kx = 0$, con $m = 2$, $c = 4$ y $k = 20$. Entonces $x(t)$ satisface la EDO lineal homogénea

$$2x'' + 4x' + 20x = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 2x' + 10x = 0,$$

cuya ecuación característica $0 = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = (\lambda + 1)^2 + 3^2$ tiene raíces $\lambda = -1 \pm 3i$. Entonces la solución general de la EDO es

$$x(t) = c_1\, \mathrm{e}^{(-1+3i)t} + c_2\, \mathrm{e}^{(-1-3i)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Sea $v_0 \neq 0$ la velocidad inicial de la masa. Tomando en cuenta la condición inicial, tenemos

$$\begin{cases} 0 = x(0) = c_1 + c_2 \\ v_0 = x'(0) = c_1(-1 + 3i) + c_2(-1 - 3i) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = -c_2 = \tfrac{v_0}{6i}.$$

Luego,

$$x(t) = \tfrac{v_0}{6i}\, \mathrm{e}^{(-1+3i)t} - \tfrac{v_0}{6i}\, \mathrm{e}^{(-1-3i)t} = \tfrac{v_0}{3}\, \mathrm{e}^{-t}\, \tfrac{\mathrm{e}^{3it} - \mathrm{e}^{-3it}}{2i} = \tfrac{v_0}{3} e^{-t} \sin 3t,$$

y entonces la masa regresa por primera vez a su posición $x = 0$ cuando $3t = \pi$, i.e. $t = \frac{\pi}{3}$ [s].