Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2023

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Interrogación 1

1. Dado es el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

   a) (**1pto**) Determine el orden de la ecuación diferencial.

   b) (**1pto**) Determine si la ecuación diferencial es o no lineal.

   c) (**4ptos**) Justifique si la función $y(x) = (x+1)^2$ es una solución particular del PVI para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

a) La EDO es de primer orden

b) La EDO es no-lineal.

c) Remplazando esta función en la edo tendremos que

$$2(x+1) = 2|x+1|$$

igualdad que se cumple siempre y cuando $x \geq -1$. Por lo anterior, la fución $y(x) = (x+1)^2$ no es solución para todo número real x.

Evaluación

a) Asignar (**1 pto**) por escribir que la ecuación es de: *primer orden*.

b) Asignar (**1 pto**) por escribir que la ecuación es: *no lineal*.

c) Asignar el siguiente puntaje:

- Asignar (**2 ptos**) si obtiene la igualdad $2(x+1) = 2|x+1|$,
- Asignar (**1 ptos**) si escribe que la igualdad se cumple para $x \geq -1$ o no se cumple para $x < -1$. Este puntaje se asignará únicamente si xu iuscsiucdy se ha obtenido el puntaje anterior.
- Asignar (**1 ptos**) si escribe por escribir que **la fución** $y(x) = (x+1)^2$ **no es solución para todo número real** x o algo equivalente. Este puntaje se asignará únicamente si se ha obtenido el puntaje anterior.

2. (**6ptos**) Determine dos soluciones, distintas, al problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x(y-1)} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Expliqué porque no se contradice el teorema de existencia y unicidad

Nota. Recuerde explicitar el dominio de su solución.

Solución.

Es claro que una solución (singular) de la EDO es la recta $y(x) = 1$, para todo número real x. Por otra parte tenemos que,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y-1} \implies \int \frac{dy}{(y-1)^{1/3}} = \int x^{1/3} dx \implies \frac{3}{2}(y-1)^{2/3} = \frac{3}{4}x^{4/3} + c$$

de donde,

$$y = 1 + \left(\frac{x^{4/3}}{2} + c\right)^{3/2}$$

Haciendo $y(0) = 1$, se obtiene que $c = 0$ y así, otra solución que satisface la ecuación diferencial es

$$y(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} x^2$$

Veamos porque esto no contradice el teorema de existencia y unicidad de soluciones.

La ecuación $dy/dx = f(x, y)$, en este caso se tiene que $f(x, y) = \sqrt[3]{x(y-1)}$.

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3(y-1)^{2/3}}$$

Así, tanto $f(x, y)$ como $f_y(x, y)$ son continuas en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 1\}$, por lo tanto, es ahí donde podemos asegurar existencia y unicidad. Como la condición inicial es $y(0) = 1$, es decir, $y = 1$, entonces en ese punto no necesariamente existe solución única.

Evaluación

- Asignar (**1 pto**) por escribir que "$y(x) = 1$ para todo número real x" o "$y(x) \equiv 1$" es una solución.
- Asignar (**1 pto**) por usar el *método de separación de variables* para resolver la edo. Este puntaje se asignará independientemente si se resuelve o no correctamente la edo.
- Asignar (**2 pto**) por resolver la edo, escribiendo una solución. Este puntaje se asignará únicamente si la solución se ha obtenido mediante el uso de un método válido y no por inspección. Si determina una solución implícita solo se asignará (**1 pto**).
- Asignar (**1 pto**) por determinar una solución al PVI. Este puntaje se asignará únicamente si la solución se ha obtenido mediante el uso de un método válido y no por inspección.

  Si el estudiante resuelve mal la ecuación diferencial pero calcula correctamente la constante, asignar (0.5 ptos).

- Asignar (**1 pto**) por escribir una justificación válida del por qué no se contradice el Teorema de Existencia y Unicidad. Este puntaje se asignará únicamente si se ha determinado dos soluciones al PVI: $y(x) \equiv 1$ e $y(x) = 1 + (1/2)^{3/2}x^2$ donde esta última no se obtuvo por inspección.

  Si el estudiante resuelve mal la ecuación diferencial pero obtiene una solución singular correcta para el PVI y entrega una justificación del por qué no se contradice el Teorema de Existencia y Unicidad, asignar (0.5 ptos).

3. *a*) (**3ptos**) Suponga que la cantidad $N(t)$ de sujetos en una población obedece la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = N^r - N$$

para algún $r < 1$. Demuestre, resolviendo la EDO, que

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 1$$

independiente de la cantidad inicial $N(0) = N_0 > 0$ de sujetos.

b) (**3ptos**) Encuentre todos los valores de k tales que

$$dx\big(6xy^k + \cos(y)\big) + dy\big(3kx^k y - x\sin(y)\big) = 0$$

es exacta. Para los valores encontrados, resuelva la ecuación diferencial.

Solución.

a) La EDO es de Bernoulli por lo que usamos la sustitución

$$u = y^{1-r}.$$

Con ella la EDO se transforma en

$$\frac{1}{1-r}u'N^r + N = N^r \Rightarrow u' + (1-r)u = 1 - r.$$

La EDO es lineal con factor integrante $\rho = e^{(1-r)t}$ de modo que

$$u(t) = e^{-(1-r)t}\int (1-r)e^{(1-r)t}dt = 1 + Ce^{-(1-r)t}$$

y entonces

$$N(t) = \left(1 + Ce^{-(1-r)t}\right)^{\frac{1}{1-r}}.$$

Considerando condición inicial $N(0) = N_0$, obtenemos la solución particular

$$N(t) = \left(1 + \left(N_0^{1-r} - 1\right)e^{-(1-r)t}\right)^{\frac{1}{1-r}}.$$

Finalmente, como $-(1-r) < 0$

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \left(1 + \left(N_0^{1-r} - 1\right)\cdot 0\right)^{\frac{1}{1-r}} = 1.$$

independiente del valor de N_0.

Evaluación

- Asignar (**0.5 pto**) por realizar la sustitución $u = y^{1-r}$ o una equivalente y que permite resolver la ecuación diferencial.
- Asignar (**1 pto**) por resolver correctamente la ecuación diferencial que resulta luego del cambio de variable.
- Asignar (**0.5 pto**) por hacer el cambio $u = y^{1-r}$ (o su equivalente) en la solución a la ecuación diferencial de la parte anterior. Este puntaje se asignará únicamente si se ha resuelto correctamente la ecuación diferencial.
- Asignar (**0.5 pto**) la solución al PVI con $N(0) = N_0$.
- Asignar (**0.5 pto**) por calcular el límite $\lim_{t\to\infty} N(t)$ y que su valor sea 1. Si el estudiante no resuelve el PVI pero prueba de manera justificada que $\lim_{t\to\infty} N(t) = 1$, asignar (**1 pto**).

b) Para que la EDO sea exacta requerimos que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(6xy^k + \cos(y)\right) = 6kxy^{k-1} - \sin(y)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3kx^k y - x\sin(y)\right) = 3k^2x^{k-1}y - \sin(y)$$

coincidan, lo que se cumple siempre y cuando $k = 0$ o $k = 2$.
Si $k = 0$**,** tenemos entonces

$$F(x,y) = \int 6x + \cos(y)dx = 3x^2 + x\cos(y) + h(y)$$

y

$$-x\sin(y) = \partial_y F = -x\sin(y) + h'(y)$$

de modo que

$$h'(x) = 0$$

y podemos eligir $h(x) = 0$. Las soluciones son

$$y(x) = \arccos(C/x - 3x)$$

con $C \in \mathbb{R}$.
Si $k = 2$, tenemos entonces

$$F(x,y) = \int 6xy^2 + \cos(y)dx = 3x^2y^2 + x\cos(y) + h(y)$$

y

$$6x^2y - x\sin(y) = \partial_y F = 6x^2y - x\sin(y) + h'(y)$$

de modo que

$$h'(x) = 0$$

y podemos eligir $h(x) = 0$. Las soluciones implícitas son entonces

$$3x^2y^2 + x\cos(y) = C$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Evaluación

- Asignar (**0.5** ptos) por calcular correctamente $\frac{\partial}{\partial y}\left(6xy^k + \cos(y)\right)$
- Asignar (**0.5** ptos) por calcular correctamente $\frac{\partial}{\partial y}\left(3kx^k y - x\sin(y)\right)$
- Asignar (**0.25** ptos) por determinar que $k = 0$ a parir de la ecuación $6kxy^{k-1} - \sin(y) = 3k^2x^{k-1}y - \sin(y)$ o una equivalente.
- Asignar (**0.25** ptos) por determinar que $k = 2$ a parir de la ecuación $6kxy^{k-1} - \sin(y) = 3k^2x^{k-1}y - \sin(y)$ o una equivalente.
- Asignar (**0.5** ptos) por determinar una solución explícita para $k = 0$. Si encuentra una solución implícita asignar (**0.25** ptos).
- Asignar (**1** ptos) por determinar una solución implícita para $k = 2$. Si comete a lo más un error en el cálculo que permite determinar implícitamente $y = y(x)$ asignar (**0.5** ptos).

4. Considere la ecuación logística como modelo del crecimiento de una población, esto es, si $P(t)$ representa la cantidad de individuos después de t años, el modelo está dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \dfrac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

donde r, la razón de crecimiento, y K, la carga máxima, se asumen constantes positivas en el modelo, y P_0 es la cantidad inicial de individuos.

a) (**4pto**) Resuelva el problema de valor incial, esto es, encuentre la solución $P(t)$.

b) (**2pto**) Si entre 1960 y 1980 la población se duplicó, y asumiendo que la razón de crecimiento del modelo es $r = 0{,}0005$, encuentre una expresión para K y estime el año para el cual la población será 3 veces la población de 1960.

Solución.

a) Usando el método de variables separables tendremos

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{P(1-\frac{P}{K})}\, dP = \int r dt$$

donde

$$\int \frac{1}{P(1-\frac{P}{K})} dP = \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1/K}{1 - P/K}\right) dP = \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{K}\right| = \ln\left|\frac{P}{1 - P/K}\right|$$

Por lo tanto, para $C \in \mathbb{R}$

$$\ln\left|\frac{P}{1 - P/K}\right| = rt + C$$

Bajo el supuesto que $0 < P < K$ tendremos que

$$\frac{P}{1 - P/K} = Be^{rt} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{Be^{rt}}{1 + \frac{B}{K}e^{rt}}$$

para $B \in \mathbb{R}$ constante.

Finalmente, aplicando la condición inicial, $P(0) = P_0$, obtenemos que $B = P_0/(1 - P_0/K)$ y así la solución del PVI es

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$

b) Consideramos como tiempo inicial $t = 0$ en 1960. Sabemos que en 1980 la población se duplicó, esto es $P(20) = 2P(0)$. Necesitamos encontrar t tal que $P(t) = 3P(0)$. Ya sabemos que $r = 0,0005$ así

$$2P_0 = P(20) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-0{,}01}}$$

así tenemos el valor K

$$K = -2P_0 \frac{(1 - e^{-0{,}01})}{2e^{-0{,}01} - 1}$$

Luego buscamos t:

$$3P_0 = P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$

ya encontrado K podemos expresar este tiempo t como

$$t = -\frac{1}{r}\ln\left(\frac{3P_0 - K}{3(P_0 - K)}\right)$$

donde $K = -2P_0\dfrac{(1 - e^{-0,01})}{2e^{-0,01} - 1}$

Evaluación

a)

- Asignar (**0.5 pto**) por obtener una igualdad integral del tipo:

$$\int \frac{1}{P(1 - \frac{P}{K})}\, dP = \int r dt$$

o una equivalente, donde uno de los integrandos solo depende de P y el otro de t.

- Asignar (**1 pto**) por calcular, justificada y correctamente, la integral en P.
Si utiliza fracciones parciales para calcular la integral pero se equivoca en el cálculo de la integral o en el cálculo de la fracción parcial, pero obtiene una expresión incorrecta para la integral asignar (0.5 ptos)
- Asignar (**1 pto**) por obtener una ecuación (correcta) del tipo:

$$\ln\left|\frac{P}{1 - P/K}\right| = rt + C$$

o una equivalente. Se descontará (**0.25 pto**) si el argumento del logaritmo no tiene valor absoluto, salvo se haya justificado por escrito por qué no es necesario.
Si calculó mal la integral para P pero el resultado corresponde a un logaritmo, asignar (0.5 ptos) si obtiene una expresión coherente con sus cálculos
- Asignar (**0.5 pto**) por obtener una fórmula correcta para $P = P(t)$ del tipo:

$$P(t) = \frac{Be^{rt}}{1 + \frac{B}{K}e^{rt}}$$

o una equivalente. Este puntaje se asignará únicamente si todos sus cálculos son correctos.
- Asignar (**1 pto**) por resolver correctamente el PVI obteniendo una fórmula para $P = P(t)$ del tipo:

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$

o una equivalente. Este puntaje se asignará únicamente si todos sus cálculos son correctos.

b)

- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de K bajo la condición de que $P(20) = 2P(0)$. Este puntaje se asignará únicamente si se resolvió correctamente el PVI.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de t pedido el cuál puede quedar en función de P_0 y K. Este puntaje se asignará únicamente si se determinó correcta y justificadamente el valor de K y si se resolvió correctamente el PVI.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos