MAT1640, semestre 2021/2

Pauta Interrogación 3

Profesores Alejandro Ramirez & Christian Sadel

**Problema 1, Versión 1:** Obtenga la solución general de

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y.$$

**Solución** Primero buscamos los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$(3-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 7.$$

Luego $\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{2}$ y $\lambda_2 = 1 - 2\sqrt{2}$ son los valores propios (2 pt.). Los vectores propios asociados a estos vaores propios son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(2 pt.) Luego la solución general del sistema es

$$c_1 e^{(1+2\sqrt{2})t} v_1 + c_2 e^{(1-2\sqrt{2})t} v_2$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes (2 pt.).

**Problema 1, Versión 2:**

Obtenga la solución general de

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 4y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - 2y.$$

**Solución** Primero buscamos los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$(2-\lambda)(-2-\lambda)+4 = \lambda^2.$$

Luego $\lambda = 0$ es el único valor propio (2 pt.). Por otra parte el único vector propio es

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que buscar algún vector propio generalizado que sea linealmente independiente de $v_1$. Podemos elegir

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2 pt.) Luego la solución general del sistema es

$$c_1 v_1 + c_2(v_2 + t v_1)$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes (2 pt.).

**Problema 2, Versión 1:**

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 10 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

**Solución**
Valores propios:

$$\begin{vmatrix} 5-r & -3 & -2 \\ 10 & -4-r & -6 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = (5-r)(-4-r)(1-r) + 20 - 6(5-r) + 30(1-r)$$

$$= (-20 - r + r^2)(1-r) + 20 - 24r = -r^3 + 2r^2 - 5r = -r(r-1-2i)(r-1+2i)$$

Valores propios $r_1 = 0$, $r_{2/3} = 1 \pm 2i$. (2 pt.)

Vectores propios: $r_1 = 0$: $-v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3$, $0 = 5v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 5v_1 - 5v_3 \Rightarrow v_1 = v_3$. Por ejemplo $\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 pt.)

$r_2 = 1+2i$: $-v_2 - 2iv_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -2iv_3$,
$0 = 10v_1+(-5-2i)v_2-6v_3 = 10v_1+(10i-4)v_3-6v_3 = 10v_1+(10i-10)v_3 \Rightarrow$
$v_1 = (1-i)v_3$. Por ejemplo $\vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}$ (1 pt.)

$r_3 = \overline{r_2}$, $\vec{v}^{(3)} = \overline{\vec{v}^{(2)}}$.

Base de soluciones reales: $e^{0t}\vec{v}^{(1)} = \vec{v}^{(1)}$, $\Re\mathrm{e}\left(e^{(1+2i)t}\vec{v}^{(2)}\right)$, $\Im\mathrm{m}\left(e^{(1+2i)t}\vec{v}^{(2)}\right)$.
(1 pt.) Así la solución general es

$$\vec{x}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^t\left(\cos(2t)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\sin(2t)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)+c_3e^t\left(\cos(2t)\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+\sin(2t)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

(1 pt.)

**Problema 2, Versión 2:**

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix}-2 & -3 & 5\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 5\end{pmatrix}\vec{x}$$

**Solución**
Valores propios:

$$\begin{vmatrix}-2-r & -3 & 5\\ -1 & 1-r & 0\\ -3 & -2 & 5-r\end{vmatrix} = (-2-r)(1-r)(5-r)+10+15(1-r)-3(5-r)$$

$$= (-2+r+r^2)(5-r)+10-12r = -r^3+4r^2-5r = -r(r-2-i)(r+2+i)$$

Valores propios $r_1 = 0$, $r_{2/3} = 2 \pm i$. (2 pt.)

Vectores propios: $r_1 = 0$: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$, $0 = -2v_1 - 3v_2 + 5v_3 =$
$-5v_1 + 2v_3 \Rightarrow v_3 = v_1$. Por ejemplo $\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. (1 pt.)

$r_2 = 2+i$: $-v_1 + (-1-i)v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = (-1-i)v_2$,
$0 = -3v_1-2v_2+(3-i)v_3 = (3+3i)v_2-2v_2+(3-i)v_3 = (1+3i)v_2+(3-i)v_3 \Rightarrow$
$v_3 = -i$. Por ejemplo $\vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix}-1-i\\1\\-i\end{pmatrix}$ (1 pt.)

$r_3 = \overline{r_2}$, $\vec{v}^{(3)} = \overline{\vec{v}^{(2)}}$.

Base de soluciones reales: $e^{0t}\vec{v}^{(1)} = \vec{v}^{(1)}$, $\Re\mathrm{e}\left(e^{(2+i)t}\vec{v}^{(2)}\right)$, $\Im\mathrm{m}\left(e^{(2+i)t}\vec{v}^{(2)}\right)$.
(1 pt.) Así la solución general es

$$\vec{x}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2e^{2t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) + c_3e^{2t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

(1 pt.)

**Problema 3, Versión 1:**
Resuelva el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + y + t$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + t^2.$$

**Solución** Podemos escribir el sistema en la forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(t)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

y

$$g(t) = \begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$$

Luego la solución general es

$$y(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)ds + e^{tA}y_0,$$

(1 pt.) donde $y_0$ es la condición inicial en $t = 0$. Ahora, los valores propios de $A$ son $\lambda_1 = \sqrt{2}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ (1 pt.). Podemos elegir como vectores propios

$$v_1 = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

y

$$v_2 = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\2+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

(2 pt.) Además

$$g(t) = \frac{t^2+t}{2}v_1 - \frac{t^2-t}{2}v_2.$$

Por lo tanto

$$e^{(t-s)A}g(s) = \frac{s^2+s}{2}e^{(t-s)\lambda_1}v_1 - \frac{s^2-s}{2}e^{(s-t)\lambda_1}v_2.$$

$$= e^{t\sqrt{2}}\frac{s^2+s}{2}e^{-s\sqrt{2}}v_1 - e^{-t\sqrt{2}}\frac{s^2-s}{2}e^{s\sqrt{2}}v_2.$$

Ahora, $\int_0^t se^{-s\sqrt{2}}ds = \frac{1}{2}(1 - e^{-t\sqrt{2}} - \sqrt{2}te^{-t\sqrt{2}})$ y $\int_0^t s^2e^{-s\sqrt{2}}ds = \frac{1}{2^{3/2}}(2 - 2e^{-t\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}te^{-t\sqrt{2}} - 2t^2e^{-t\sqrt{2}})$. Luego

$$\int_0^t \frac{s^2+s}{2}e^{-s\sqrt{2}}ds = \frac{1}{4}(1-e^{-t\sqrt{2}}-\sqrt{2}te^{-t\sqrt{2}})+\frac{1}{2^{5/2}}(2-2e^{-t\sqrt{2}}-2\sqrt{2}te^{-t\sqrt{2}}-2t^2e^{-t\sqrt{2}}).$$

Por otra parte $\int_0^t se^{s\sqrt{2}}ds = \frac{1}{2}(1-e^{t\sqrt{2}}+\sqrt{2}te^{t\sqrt{2}})$ y $\int_0^t s^2e^{s\sqrt{2}}ds = \frac{1}{2^{3/2}}(-2-2e^{t\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}te^{t\sqrt{2}} + 2t^2e^{t\sqrt{2}})$. Luego

$$\int_0^t \frac{s^2-s}{2}e^{s\sqrt{2}}ds = -\frac{1}{4}(1-e^{t\sqrt{2}}+t\sqrt{2}e^{t\sqrt{2}})+\frac{1}{2^{5/2}}(-2-2e^{t\sqrt{2}}-2\sqrt{2}te^{t\sqrt{2}}+2t^2e^{t\sqrt{2}}).$$

De aquí conlcuimos que la solución general del sistema es

$$\left(\tfrac{1}{4}(e^{t\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2}t) + \tfrac{1}{2^{5/2}}(2e^{t\sqrt{2}} - 2 - 2\sqrt{2}t - 2t^2)\right)v_1$$
$$+\left(\tfrac{1}{4}(e^{-t\sqrt{2}} - 1 + t\sqrt{2}) - \tfrac{1}{2^{5/2}}(-2e^{-t\sqrt{2}} - 2 - 2\sqrt{2}t + 2t^2)\right)v_2$$

(2 pt.)

## Problema 3, Versión 2:

Resuelva el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + y + t^2$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y + t.$$

**Solución** Podemos escribir el sistema en la forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(t)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$g(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Luego la solución general es

$$y(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} g(s) ds + e^{tA} y_0,$$

(1 pt.) donde $y_0$ es la condición inicial en $t = 0$. Ahora, los valores propios de $A$ son $\lambda_1 = \sqrt{2}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ (1 pt.). Podemos elegir como vectores propios

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(2 pt.) Además

$$g(t) = \frac{t^2 + t}{2} v_1 + \frac{t^2 - t}{2} v_2.$$

Por lo tanto

$$e^{(t-s)A} g(s) = \frac{s^2 + s}{2} e^{(t-s)\lambda_1} v_1 + \frac{s^2 - s}{2} e^{(s-t)\lambda_1} v_2.$$

$$= e^{t\sqrt{2}} \frac{s^2 + s}{2} e^{-s\sqrt{2}} v_1 + e^{-t\sqrt{2}} \frac{s^2 - s}{2} e^{s\sqrt{2}} v_2.$$

Ahora, $\int_0^t s e^{-s\sqrt{2}} ds = \frac{1}{2}(1 - e^{-t\sqrt{2}} - \sqrt{2} t e^{-t\sqrt{2}})$ y $\int_0^t s^2 e^{-s\sqrt{2}} ds = \frac{1}{2^{3/2}}(2 - 2e^{-t\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} t e^{-t\sqrt{2}} - 2t^2 e^{-t\sqrt{2}})$. Luego

$$\int_0^t \frac{s^2 + s}{2} e^{-s\sqrt{2}} ds = \frac{1}{4}(1 - e^{-t\sqrt{2}} - \sqrt{2} t e^{-t\sqrt{2}}) + \frac{1}{2^{5/2}}(2 - 2e^{-t\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} t e^{-t\sqrt{2}} - 2t^2 e^{-t\sqrt{2}}).$$

Por otra parte $\int_0^t s e^{s\sqrt{2}} ds = \frac{1}{2}(1 - e^{t\sqrt{2}} + \sqrt{2} t e^{t\sqrt{2}})$ y $\int_0^t s^2 e^{s\sqrt{2}} ds = \frac{1}{2^{3/2}}(-2 - 2e^{t\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} t e^{t\sqrt{2}} + 2t^2 e^{t\sqrt{2}})$. Luego

$$\int_0^t \frac{s^2 - s}{2} e^{s\sqrt{2}} ds = -\frac{1}{4}(1 - e^{t\sqrt{2}} + t\sqrt{2} e^{t\sqrt{2}}) + \frac{1}{2^{5/2}}(-2 - 2e^{t\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} t e^{t\sqrt{2}} + 2t^2 e^{t\sqrt{2}}).$$

De aquí conlcuimos que la solución general del sistema es

$$\left(\tfrac{1}{4}(e^{t\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2} t) + \tfrac{1}{2^{5/2}}(2e^{t\sqrt{2}} - 2 - 2\sqrt{2} t - 2t^2)\right) v_1$$
$$- \left(\tfrac{1}{4}(e^{-t\sqrt{2}} - 1 + t\sqrt{2}) - \tfrac{1}{2^{5/2}}(-2e^{-t\sqrt{2}} - 2 - 2\sqrt{2} t + 2t^2)\right) v_2$$

**Problema 4, Versión 1:**
Encuentro y clasifique (tipo y estabilidad) los puntos de equilibrio del sistema autónoma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x^2 - 5x + xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6x - 2y$$

**Solución**
Puntos de equilibrio: $2x^2 - 5x + xy = 0 \quad \wedge \quad 6x - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow$
$x(2x-5+y) = 0 \quad \wedge \quad y = 3x \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \ \vee \ 2x-5+y = 0) \quad \wedge \quad y = 3x$
$\Leftrightarrow \quad (x = 0 \ \wedge \ y = 0) \quad \vee \quad (y = 3x \ \wedge \ 5x - 5 = 0)$
Así tenemos dos puntos e equilibrio: $(0, 0)$ y $(1, 3)$. (2 pt.)

El Jacobiano es dado por $J(x, y) = \begin{pmatrix} 4x - 5 + y & x \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$
Así tenemos $J(0, 0) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ que tiene valores propios $-5 < -2 < 0$.
Así, el punto $(0, 0)$ es un nodo convergente (sumidero) y estable asíntoticamente (2 pt.)
Además, $J(1, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ que tiene determinante $\det J(1, 3) = -10 < 0$.
Por eso, $(1, 3)$ es un punto silla y inestable. (2 pt.)

**Problema 4, Versión 2:**
Encuentro y clasifique (tipo y estabilidad) todos los puntos de equilibrio del sistema autónoma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + 2x - 4xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6y - 3x$$

**Solución**
Puntos de equilibrio: $x^2 + 2x - 4xy = 0 \quad \wedge \quad 6y - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow$
$x(x+2-4y) = 0 \quad \wedge \quad x = 2y \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \ \vee \ x+2-4y = 0) \quad \wedge \quad x = 2y$
$\Leftrightarrow \quad (x = 0 \ \wedge \ y = 0) \quad \vee \quad (x = 2y \ \wedge \ -2y + 2 = 0)$
Así tenemos dos puntos de equilibrio: $(0, 0)$ y $(2, 1)$. (2 pt.)

El Jacobiano es dado por $J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2 - 4y & -4x \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Así tenemos $J(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ que tiene valores propios $6 > 2 > 0$. Así, el punto $(0,0)$ es un nodo divergente (fuente) y inestable. (2 pt.)
Además, $J(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ con determinantedet $J(2,1) = -12 < 0$. Por eso, $(2,1)$ es un punto silla y inestable. (2 pt.)