PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEMESTRE DE VERANO 2017

Interrogación 2
MAT1640 ⋆ ECUACIONES DIFERENCIALES

1. *a*) Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde a, b, c son números reales.

*a*1) Encunetre condiciones para a, b, c para que la ecuación tenga soluciones periodicas.

*a*2) Encunetre condiciones para a, b, c tal

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0.$$

b) Encontrar la solución general de la ecuación

$$y^{(7)} - 5y^{(6)} + 7y^{(5)} + 7y^{(4)} - 36y''' + 50y'' - 32y' + 8y = 0$$

Hint: Notar que $x^7-5x^6+7x^5+7x^4-36x^3+50x^2-32x+8 = (x^2-2x+2)(x-1)^3(x^2-4)$.

Solución:

El polinomio caracteristico asociado a la ecuación es $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ cuyas raices son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \lambda_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

a) *a*1) Si $y(x)$ es solución periodica, entonces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$. Notemos que

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ con } Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ y } ac > 0$$

$$\text{Luego } y(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{ac}}{a}x\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{ac}}{a}x\right) = C\cos\left(\frac{\sqrt{ac}}{a}x + \alpha\right)$$

$a2)$ Tenemos tres casos posibles:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
  Sabemos que en este caso que $b^2 - 4ac > 0$ y la solución general de la ecuación es
  $$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$
  Luego
  $$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{\lambda_1 x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\lambda_2 x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 > 0 \text{ y } \lambda_2 > 0 \end{aligned}$$
  Para que lo anterior ocurra se debe tener que:
  Subcaso 1: $a > 0$ y $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ y $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$.
  Si $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ y $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$, entonces $-2b > 0$ y, por lo tanto, $b < 0$. Luego $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ implica que $0 < ac$. De todo lo anterior se tiene que
  $$a > 0\,, b < 0\,, c > 0$$
  Subcaso 2: $a < 0$ y $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ y $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$.
  Si $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ y $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, entonces $-2b < 0$ y, por lo tanto, $b > 0$. Luego $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ implica que $0 > ac$. De todo lo anterior se tiene que
  $$a < 0\,, b > 0\,, c < 0$$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 = \lambda_2$.
  En este caso tenemos que $b^2 - 4ac = 0$ y la solución general es
  $$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{\lambda x}$$
  con $\lambda = \dfrac{-b}{2a}$.
  Luego

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{\lambda x} = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda > 0\\ &\Leftrightarrow \frac{-b}{2a} > 0\\ &\Leftrightarrow ab < 0\end{aligned}$$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
  En este caso $b^2 - 4ac < 0$ y se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0 &\Leftrightarrow Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0\\ &\Leftrightarrow \frac{-b}{2a} > 0\\ &\Leftrightarrow ab < 0\end{aligned}$$

  Este caso es análogo

Lo anterior se puede resumir como

$$b^2 - 4ac \geq 0,\ ab < 0,\ ac > 0$$

ó

$$b^2 - 4ac < 0,\ ab < 0$$

b) Como $x^2 - 2x + 2 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)$, entonces es directo que la solución general de la ecuación es

$$y(x) = e^x(C_1\cos(x) + C_2\,\mathrm{sen}(x)) + (C_3x^2 + C_4x + C_5)e^x + C_6e^{2x} + C_7e^{-2x}$$

2. Resolver el problema:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' - 4y &= e^t + 4t^2 - 2t + 1 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

La solución es de la forma $y = y_h + y_p$ donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea $y'' + 3y' - 4y = 0$ e y_p es cualquier solución de la ecuación original.

El polinomio característico es $r^2 + 3r - 4 = 0$ cuyas raices son -4 y 1 por lo tanto $y_h = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t$.

Buscamos coeficientes a, b, c y d tales que $y_1 = ate^t$ sea solución de $y'' + 3y' - 4y = e^t$ e $y_2 = bt^2 + ct + d$ sea solución de la ecuación $y'' + 3y' - 4y = 4t^2 - 2t + 1$

$$y_1' = ae^t + ate^t, \;\; y_1'' = 2ae^t + ate^t, \;\; y_2' = 2bt + c, \;\; y_2'' = 2b$$

Se debe cumplir entonces que

$2ae^t + ate^t + 3ae^t + 3ate^t - 4ate^t = e^t$ y $2\mathrm{b} + 6\mathrm{bt} + 3\mathrm{c} - 4\mathrm{bt}^2 - 4\mathrm{ct} - 4\mathrm{d} = 4\mathrm{t}^2 - 2\mathrm{t} + 1$

Vemos que $a = \frac{1}{5}, b = -1, c = -1, d = -\frac{3}{2}$

Por lo tanto la solución general es

$$y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t + \frac{1}{4} te^t - t^2 - t - \frac{3}{2}$$

$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = 0$ por lo tanto $C_1 + C_2 = \frac{3}{2}$ y $y'(0) = -4C_1 + C_2 + \frac{1}{4} - 1 = 0$.

La solución del PVI es

$$y(t) = \frac{3}{20} e^{-4t} + \frac{27}{20} e^t + \frac{1}{4} te^t - t^2 - t - \frac{3}{2}$$

3. *a*) Resolver $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}\ln(t)$.

b) Se sabe que $y_1 = e^t$ e $y_2 = t + 1$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$y'' - \frac{t+1}{t}y' + \frac{1}{t}y = 0$$

Encontrar la solución general de la ecuación

$$y'' - \frac{t+1}{t}y' + \frac{1}{t}y = t$$

.

Solución:

a) La solución es de la forma $y = y_h + y_p$ donces y_h es la solución general de la ecuación homogénea $y'' + 4y' + 4y = 0$ e y_p es cualquier solución de la ecuación original.

El polinomio característico es $(r+2)^2 = 0$ que tiene como única raiz -2, por lo tanto $y_h = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$.

Las funciones $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = te^{-2t}$ son dos soluciones l.i. de la homogenea. Buscamos y_p usando variación de parámetros. Por encontrar funciones u y v tales que

$$\begin{array}{rcl} u'e^{-2t} + v'te^{-2t} & = & 0 \\ -2u'e^{-2t} + v'e^{-2t} - 2v'te^{-2t} & = & e^{-2t}\ln(t) \end{array}$$

Combinando las dos ecuaciones obtenemos que $v' = \ln(t)$ y $u' = t\ln(t)$ integrando obtenemos que $v(t) = t\ln(t) - t$ y $u(t) = -\frac{1}{2}t^2\ln(t) + \frac{t^2}{4}$.

Una solución particular de la ecuación es

$$y_p = e^{-2t}\left(-\frac{1}{2}t^2\ln(t) + \frac{t^2}{4} + t^2\ln(t) - t^2\right) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}t^2\ln(t) - \frac{3}{4}t^2\right)$$

Se cumple entonces que la solución general de la ecuación es

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2\ln(t) - \frac{t^2}{4}\right)e^{-2t} + (t\ln(t) - t)\,te^{-2t} + C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$$

$$y(t) = e^{-2t}\left(\frac{3}{2}t^2\ln(t) - \frac{5}{4}t^2 + C_1 + tC_2\right)$$

b) Se sabe que la solución a la ecuación esta dada por

$$y(t) = c_1 e^t + c_2(t+1) + y_p$$

donde y_p es una solución particular de $y'' - \dfrac{t+1}{t}y' + \dfrac{1}{t}y = t$. Ocupando variación de parametros se sabe que una posible solución particular esta dada por

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)(t+1)$$

donde

$$c_1(x) = -\int \frac{te^t}{W(y_1, y_2)}dt \text{ y } c_2(x) = \int \frac{t(t+1)}{W(y_1, y_2)}dt$$

Donde $W(y_1, y_2) = -te^t$.
Integrando se tiene que

$$c_1(x) = -\int \frac{t(1+t)}{-te^t}dt = e^{-t}(-t-2)$$

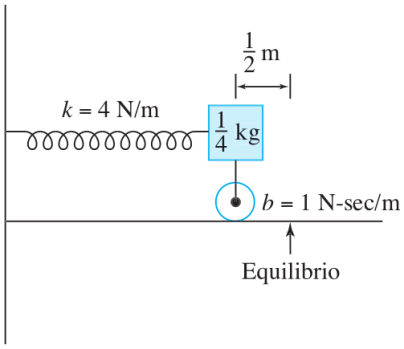
y

$$c_2(x) = \int \frac{t^2 e^t}{-te^t}dt = -\int 1dt = -t$$

Luego la solución a la ecuación esta dada por

$$y(t) = c_1 e^t + c_2(t+1) + e^{-t}(-t-2)e^t - t(t+1) = c_1 e^t + c_2(t+1) - t^2 - 2t - 2$$

4. Una masa de 1/4 de kg está unida a un resorte con una rigidez de 4 N/m como se muestra en la figura.



La constante de amortiguamiento b para el sistema es de 1 N-seg/m. Si la masa se desplaza 1/2 m a la izquierda y recibe una velocidad inicial de 1 m-seg a la izquierda, determine la ecuación de movimiento. ¿Cuál es el máximo desplazamiento desde el equilibrio que alcanzará la masa?

Solución:

Si $x(t)$ es la función de movimiento de la masa, entonces dada las condiciones iniciales debemos resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x''(t) + x'(t) + 4x(t) &= 0 \\ x(0) &= -\frac{1}{2} \\ x'(0) &= -1 \end{aligned}$$

Se comprueba facilmente que la solución general esta dada por

$$x(t) = e^{-2t}\left(A\cos(2\sqrt{3}t) + B\,\mathrm{sen}(2\sqrt{3}t)\right)$$

imponiendo las condiciones iniciales se tiene que

$$x(t) = e^{-2t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}(2\sqrt{3}t)\right)$$

Para encontrar el máximo desplazamiento derivamos e igualamos a cero para encontrar los puntos criticos.

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-2t}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(2\sqrt{3}t\right) - 2\cos\left(2\sqrt{3}t\right)\right) - 2e^{-2t}\left(-\frac{\mathrm{sen}\left(2\sqrt{3}t\right)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\cos\left(2\sqrt{3}t\right)\right) = 0$$

De donde $\tan\left(2\sqrt{3}t\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$. Luego el desplazamiento es máximo para $t = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)$.

Finalmente el desplazamiento máximo es $\left|x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)\right)\right|$.

5. Para la ecuacón $y''+y=0$ ocupe series de potencias para encontrar su solución general.

Solución:

Sea $y(x)=\sum_0^\infty a_k x^k$, buscamos determinar los coeficientes de modo que y sea solución de $y''+y=0$.

$y'(x)=\sum_1^\infty k a_k x^{k-1}$ y $y''(x)=\sum_2^\infty k(k-1)a_k x^{k-2}$

Por lo tanto

$$y''+y=\sum_2^\infty k(k-1)a_k x^{k-2}+\sum_0^\infty a_k x^k=\sum_0^\infty (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+\sum_0^\infty a_k x^k$$

$$=\sum_0^\infty \left[(k+2)(k+1)a_{k+2}+a_k\right]x^k$$

Para que esta suma sea 0, todos los coeficientes deben ser 0 por lo tanto se obtiene la fórmula de recurrencia

$$a_{k+2}=-\frac{1}{(k+2)(k+1)}a_k$$

Por lo tanto $a_2=-\frac{1}{2}a_0,\ a_4=\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0,\ a_6=\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4!}a_0,\cdots a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{(2k)!}a_0$.

Análogamente $a_3=-\frac{1}{3\cdot 2}a_1,\ a_5=\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_1,\ a_7=\frac{1}{7\cdot 6\cdot 5!}a_1,\cdots a_{2k+1}=(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}a_1$.

Por lo tanto $y(x)=\sum_0^\infty a_k x^k=a_0\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+a_1\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

$=a_0\cos(x)+a_1\,\mathrm{sen}(x)$.

Se tiene que $\mathrm{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son l.i. y la ecuación es de orden 2 por lo tanto $y(x)=a_0\cos(x)+a_1\,\mathrm{sen}(x)$ es solución general