MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 7)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Repaso de la clase anterior

- Resolución de EDO's mediante sustitución.

Nombre	EDO	Sustitución
	$y' = F(ax + by + c)$	$v = ax + by + c$
Homogéneas	$y' = F(\frac{y}{x})$	$v = y/x$
Bernoulli	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$v = y^{1-n}$
Riccati	$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$	$y = y_1 + \frac{1}{v}$

- EDO's exactas: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (forma diferencial)
  y existe una función $F(x,y)$ tal que:
  $M(x,y) = \partial_x F(x,y), \;\; N(x,y) = \partial_y F(x,y).$
  - Criterio de exactitud: $\partial_y M = \partial_x N$
  - Vimos un método para encontrar F
  - Solución general de la EDO: $F(x,y) = C$
- Comenzamos a estudiar dos casos particulares de EDO's de 2do orden $\longrightarrow$ EDO's reducibles

2 sustituciones específicas para EDO's de segundo orden

Def. Una EDO de 2do orden, $F(x, y, y', y'') = 0$, se dice **reducible** si ocurre algúna de las siguientes condiciones:

a) no depende explícitamente de y, es decir, $F(x, y', y'') = 0$,

b) no depende explícitamente de x, es decir, $F(y, y', y'') = 0$

¿Cómo resolvemos estas EDO's? $\longrightarrow$ Sustitución: $p = y'$

a) Para resolver $F(x, y', y'') = 0$: $\quad p = y' \quad \Rightarrow \quad p' = y''$

Luego la EDO para p es

$$\underbrace{F(x, p, p') = 0}_{\text{EDO de 1er orden}} \quad \longrightarrow \quad \text{Solución general:} \quad p(x, C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Entonces, volviendo a la ecuación original:

$$\text{Solución general de la EDO:} \quad y(x) = \int y'(x)dx = \underbrace{\int p(x, C_1)dx}_{\text{depende de 2 constantes, } C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo.

- $xy'' + 2y' = 6x$

Observamos que no aparece la variable (dependiente) y

Solución general:

$$y(x) = x^2 + \frac{C_1}{x} + C_2$$

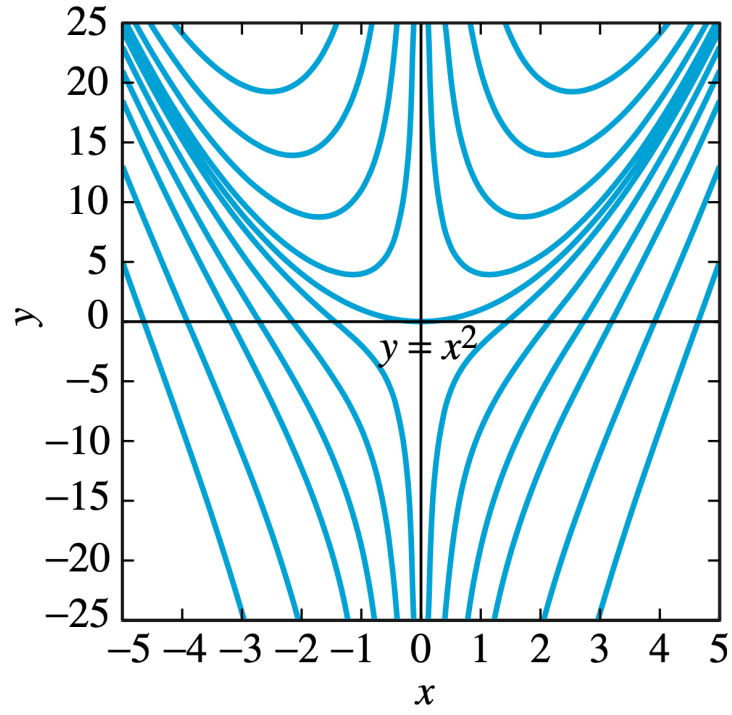


FIGURA 1.6.8. Curvas solución de la forma $y = x^2 + \frac{C_1}{x}$ para $C_1 = 0, \pm 3, \pm 10, \pm 20, \pm 35, \pm 60, \pm 100.$

b) Para resolver $F(y, y', y'') = 0$:

$$p = y' \quad \Rightarrow \quad p' = y'' \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p} = p\frac{dp}{dy}$$

luego la EDO para p es

$$\underbrace{F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0}_{\text{EDO de 1er orden para } p \text{ como función de } y} \quad \longrightarrow \quad \text{Solución general:} \quad p(y, C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Entonces, volviendo a la variable original y:

$$p(y, C_1) = \frac{dy}{dx} \quad \longrightarrow \quad dx = \frac{dy}{p(y, C_1)} \quad \longrightarrow \quad x(y) = \underbrace{\int \frac{1}{p(y, C_1)} dy}_{\text{depende de 2 constantes, } C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Si $P(y, C_1)$ es antiderivada de $\frac{1}{p(y, C_1)}$ entonces:

$$\text{Solución general (implícita):} \quad x(y) = P(y, C_1) + C_2.$$

Ejemplo.

- $yy'' = (y')^2$

Observamos que no aparece la variable (independiente) x

Solución general (implícita):

$$C_1 x = \ln|y| + C_2$$

Solución general (explícita):

$$y(x) = Ae^{Bx}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

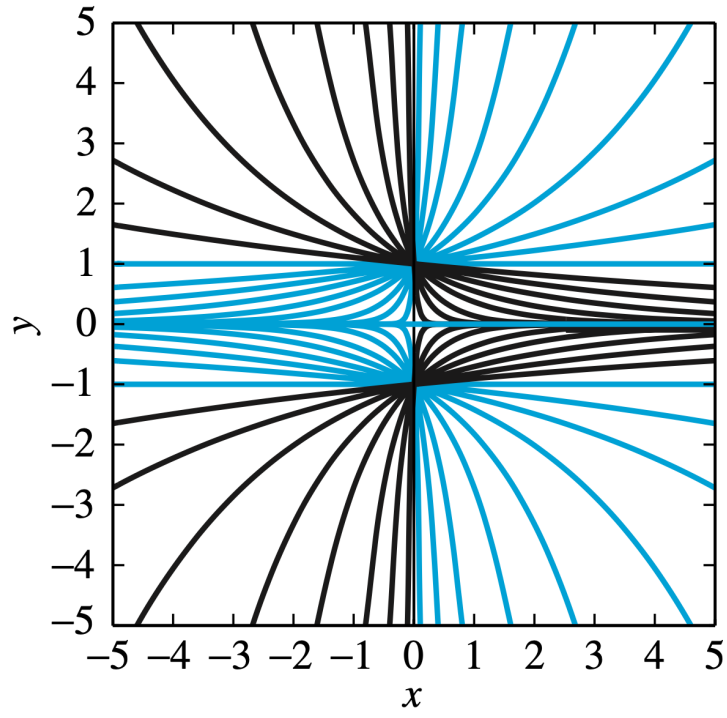


FIGURA 1.6.9. Curvas solución $y = Ae^{Bx}$ con $B = 0$ y $A = 0, \pm 1$ son las rectas horizontales $y = 0$, ± 1. Las curvas exponenciales con $B > 0$ y $A = \pm 1$ están en gris, y aquellas con $B < 0$ y $A = \pm 1$ son negras.

Metodología para la resolución de EDO's de 1er orden y 2do orden reducibles

Si la EDO es de 1er orden:

1. ¿Es de variable separable? Si lo es $\longrightarrow$ método de separación de variables
2. ¿Es lineal? es decir, ¿Se puede escribir de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$?
   Si se puede $\longrightarrow$ método del factor integrante
3. ¿Es exacta? es decir,
   ¿Se puede escribir de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, con $\partial_y M = \partial_x N$?
   Si se puede $\longrightarrow$ método para encontrar $F(x,y)$ tal que $M = \partial_x F$, $N = \partial_y N$.
4. ¿Existe alguna sustitución que simplifique la ecuación?
   Verificar si la EDO es de alguno de los siguientes tipos

Nombre	EDO
	$y' = F(ax + by + c)$
Homogéneas	$y' = F(\frac{y}{x})$
Bernoulli	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$
Riccati	$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$

Si la EDO es de 2do orden:

- ¿Es reducible? es decir, ¿es independiente de la variable x o y?

Estudio de modelos matemáticos

Estudiaremos más detalladamente algunos modelos de crecimiento poblacional

Objetivo del modelo: Estudiar el comportamiento de una población (personas, animales, bacterias, etc.) en el tiempo, determinado solamente por su tasa de natalidad y mortalidad.

Notación:

- $P(t) \rightarrow$ número de individuos en una población en tiempo t.
- $\beta(t) \rightarrow$ número de nacimientos por unidad de población por unidad de tiempo, en tiempo t (tasa de natalidad).
- $\delta(t) \rightarrow$ número de muertes por unidad de población por unidad de tiempo, en tiempo t (tasa de mortalidad).

Para determinar el comportamiento de P en el tiempo necesitamos aproximar su variación en un intervalo de tiempo Δt

Modelación

Consideremos el intervalo temporal $[t, t+\Delta t]$

Aproximadamente, se tiene que en $[t, t+\Delta t]$ hay:

$$\text{nacimientos: } \beta(t)P(t)\Delta t \quad ; \quad \text{muertes: } \delta(t)P(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad P(t+\Delta t) - P(t) \approx \beta(t)P(t)\Delta t - \delta(t)P(t)\Delta t$$

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx [\beta(t) - \delta(t)]P(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx [\beta(t) - \delta(t)]P(t)$$

Ecuación de población general: $\boxed{\frac{dP}{dt} = (\beta(t) - \delta(t))P}$

Obs. En general las tasas de natalidad y mortalidad pueden depender de $P(t)$, en cuyo caso la EDO es no-lineal.

Consideremos algunas situaciones específicas:

• *Situación ambiental ilimitada*: medio ambiente sin limitaciones de espacio y alimento, con tasas de natalidad y mortalidad constantes:

$$k = \beta - \delta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad P'(t) = kP$$

• *Situación ambiental limitada*: Si M es la capacidad máxima que soporta el medio ambiente, $M - P$ es la capacidad residual y se puede asumir que

$$\beta(t) - \delta(t) = k(M - P(t)),\ k > 0 \quad \Rightarrow \quad P'(t) = k(M - P)P.$$

• *Situación de competencia*: se asume una natalidad constante y una mortalidad proporcional a P (mayor competencia).

$$\delta(t) = \alpha P(t),\ \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad P'(t) = (\beta - \alpha P)P = k(M - P)P$$

• *Situación proporcional a encuentros*: se asume una población de tamaño constante M, y $P(t)$ representa una sub-población infectada con una enfermedad contagiosa. Si asume que la tasa de contagio es proporcional a los encuentros entre infectados y no-infectados,

$$P'(t) = k(M - P)P$$

Lo anterior motiva el estudio de

a) el modelo de crecimiento natural (es exponencial): $P'(t) = kP$

b) el modelo logístico: $P'(t) = k(M - P)P$

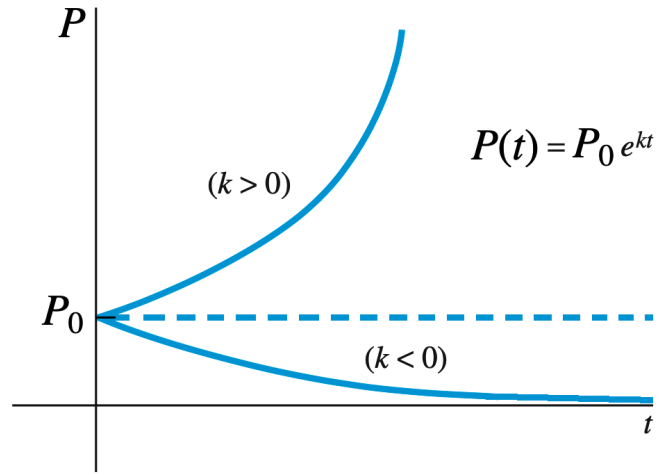
Modelo de crecimiento natural

Ya hemos visto que la solución al modelo de crecimiento natural es:

$$P(t) = P_0 e^{kt}, \quad \text{donde} \quad \text{Población inicial} = P(0) = P_0 > 0$$

Análisis del modelo:

- $k > 0 \quad \Rightarrow \quad$ crecimiento exponencial
- $k = 0 \quad \Rightarrow \quad$ población en equilibrio
- $k < 0 \quad \Rightarrow \quad$ decrecimiento exponencial



Al problema de encontrar k dado un conjunto de valores $P(t_1), \ldots, P(t_n)$ se le denomina ajuste del modelo.

Modelo logístico

Para $M, P_0 > 0$, resolvamos el PVI:

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)P, \quad P(0) = P_0.$$

La solución es:

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

$$= \left(\frac{M}{P_0 e^{kMt} + (M - P_0)} \right) P_0 e^{kMt}$$

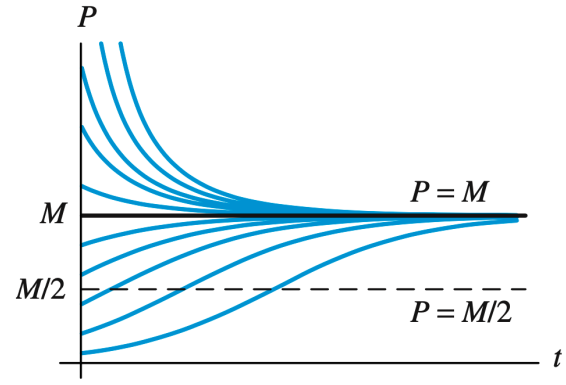


FIGURA 2.1.3. Curvas solución típicas para la ecuación logística $P' = kP(M - P)$. Cada curva solución que inicia debajo de la línea $P = M/2$ cuenta con un punto de inflexión.

Analicemos el modelo en términos de la condición inicial.

- Si $P_0 = M \quad \Rightarrow \quad$ P(t)=M (población en equilibrio)
- Si $0 < P_0 < M \quad \Rightarrow \quad P(t) < M, \quad P'(t) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = M,$
- Si $P_0 > M \quad \Rightarrow \quad P(t) > M, \quad P'(t) < 0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = M$

Conclusión: La población siempre converge a un tamaño poblacional límite M cuando $t \to \infty$ (M: capacidad máxima o población límite).

Una variante del modelo logístico es el:

Modelo de explosión/extinción demográfica

$P(t)$: población total de animales con una fracción fija α de machos y $1-\alpha$ de hembras.

- El número de nacimientos es proporcional a los encuentros entre machos y hembras:

$$\text{nacimientos} = \gamma \cdot \alpha P(t) \cdot (1-\alpha)P = kP^2 \quad \text{con} \quad k > 0.$$

- El número de muertes es proporcional al tamaño poblacional:

$$\text{muertes} = \delta P(t), \quad \delta > 0.$$

Luego, si $M = \delta/k > 0$,

$$\frac{dP}{dt} = k(P-M)P, \quad P(0) = P_0$$

- Si $P_0 = M \quad \Rightarrow \quad P(t) = M$
- Si $0 < P_0 < M \quad \Rightarrow \quad P(t) < M$
  $P'(t) < 0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = 0$
- Si $P_0 > M \quad \Rightarrow \quad P(t) > M,$
  $P'(t) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = +\infty$

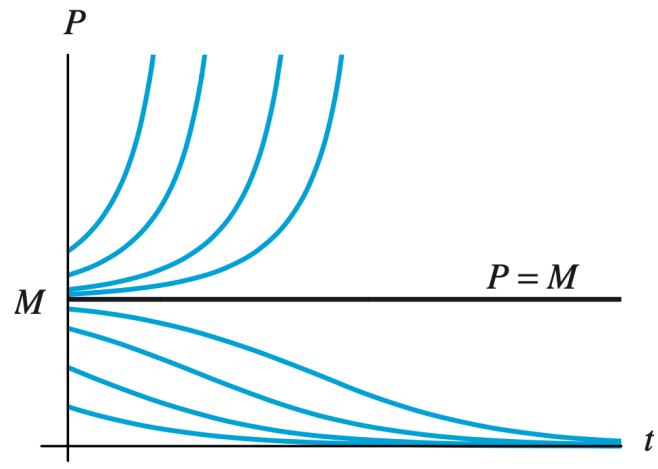


FIGURA 2.1.6. Curvas solución típicas para la ecuación explosión/extinción $P' = kP(P-M)$.

Ajuste del modelo logístico

En la práctica, es usual elegir un modelo (una EDO) y luego ajustar sus paramétros teniendo en cuenta un conjunto de datos obtenidos.

Ejemplos:

$P(t)$: población de Estados Unidos;
t: tiempo en años desde 1800 (es decir, $t = 0$ en 1800)

1) Se busca ajustar un modelo se crecimiento natural en base a los siguientes datos:

Año	N° de personas
1800	5.308 millones
1900	76.212 millones

$$\Rightarrow P_0 = 5.308, \quad k \approx 0.026643, \quad P(t) = (5.308)e^{(0.026643)t}$$

¿Cúal es el crecimiento porcentual de un año a otro? $\rightarrow$ 2.7% por año.

2) Se busca ahora ajustar un modelo logístico en base a los siguientes datos:

Año	N° de personas
1800	5.308 millones
1850	23.192 millones
1900	76.212 millones

$$\Rightarrow P_0 = 5.308, \quad k \approx 0.000167716, \quad M \approx 188.121$$

$$P(t) = \frac{998.546}{5.308 + (188.121)e^{-(0.031551)t}}$$

Obs. En este modelo el crecimiento porcentual por año no es constante

¿Cómo se comparan los modelos (ajustados) anteriores con los datos reales?

Año	Población real de Estados Unidos	Modelo exponencial	Error exponencial	Modelo logístico	Error logístico
1800	5.308	5.308	0.000	5.308	0.000
1810	7.240	6.929	0.311	7.202	0.038
1820	9.638	9.044	0.594	9.735	−0.097
1830	12.861	11.805	1.056	13.095	−0.234
1840	17.064	15.409	1.655	17.501	−0.437
1850	23.192	20.113	3.079	23.192	0.000
1860	31.443	26.253	5.190	30.405	1.038
1870	38.558	34.268	4.290	39.326	−0.768
1880	50.189	44.730	5.459	50.034	0.155
1890	62.980	58.387	4.593	62.435	0.545
1900	76.212	76.212	0.000	76.213	−0.001
1910	92.228	99.479	−7.251	90.834	1.394
1920	106.022	129.849	−23.827	105.612	0.410
1930	123.203	169.492	−46.289	119.834	3.369
1940	132.165	221.237	−89.072	132.886	−0.721
1950	151.326	288.780	−137.454	144.354	6.972
1960	179.323	376.943	−197.620	154.052	25.271
1970	203.302	492.023	−288.721	161.990	41.312
1980	226.542	642.236	−415.694	168.316	58.226
1990	248.710	838.308	−589.598	173.252	76.458
2000	281.422	1094.240	−812.818	177.038	104.384

FIGURA 2.1.4. Comparación de los modelos de crecimiento exponencial y logístico con el censo de población de Estados Unidos (en millones).

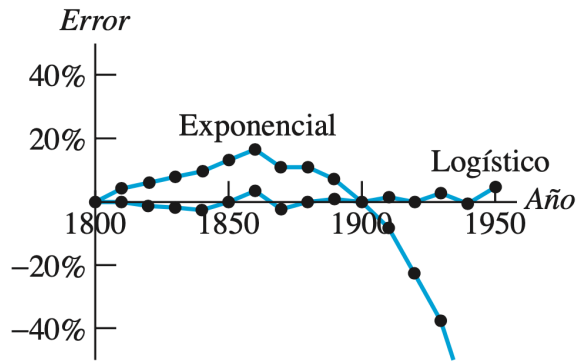


FIGURA 2.1.5. Porcentaje de error en los modelos de población exponencial y logístico para 1800-1950.

En la sección *2.1 Aplicación* del libro se explica un poco más como ajustar un modelo logístico con múltiples datos.