Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
25 de noviembre de 2016

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
EXAMEN

1. Considere el problema de valor inicial

$$(x+3)\,y' = y^2 - 2y - 3 \qquad y(x_0) = y_0$$

a) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema tiene solución única y ecuéntrela.

b) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema tiene más de una solución y exhiba por lo menos dos.

c) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema no tienen solución e indique la razón.

Solución : Observe que la ecuación propuesta es de variables separables, por lo que al resolverla tenemos que:

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2 - 4} = \int \frac{dx}{(x+3)}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y(x) = \frac{3 + C(x+3)^4}{1 - C(x+3)^4}$$

Además tenemos la solución singular $y = -1$.

a) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema tiene solución única y ecuéntrela.
Solución:
Observe que el Teorema de Existencia y Unicidad garantiza la existencia y unicidad del problema de valor inicial siempre que $x_0 \neq -3$. En tal caso la solución está dada por la forma general con $C = \dfrac{y_0 - 3}{(y_0+1)(x_0+3)^4}$.
Además para la $x_0 = -3$ e $y_0 = -1$ la única solución es la solución singular $y = -1$.

b) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema tiene más de una solución y exhiba por lo menos dos.
Solución:
Observe que si $x_0 = -3$ e $y_0 = 3$ el problema tiene infinitas soluciones, ya que para todo C la solución general cumple con está condición inicial.

c) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema no tienen solución.
Solución:
Observe que si $x_0 = -3$ e $y_0 \neq 3, -1$ no existe solución, esto se ve reemplazando directamente dichos valores en la ecuación planteada.

2. Encuentre la solución general de la E.D.O. $x''' + 3x'' + x' + x = t^2$.

Solución :

$$x(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{16}{27} + C_1\cos(t) + C_2\,\mathrm{sen}(t) + C_3e^{-3t}.$$

3. Dado el sistema

$$\begin{cases} x' &= 10x - x^2 - \frac{1}{2}xy \\ y' &= 16y - y^2 - xy \end{cases}$$

determine sus puntos de equilibrio y, **mediante linealización** determine la estabilidad de cada uno de ellos

Solución : Sean $F(x.y) = 10x - x^2 - \dfrac{1}{2}xy; \quad G(x,y) = 16y - y^2 - xy.$

Los puntos de equilbrio son las soluciones de $F(x,y) = 0;\ G(x,y) = 0.$

Resolviendo obtenemos $P_1 = (0,0);\ P_2 = (10,0);\ P_3 = (0,16);\ P_4 = (4,12).$

La matriz de linealización en un punto (x,y) es

$$J(F,G)(x,y) = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 2x - \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} \\ -y & 16 - 2y - x \end{pmatrix}.$$

- En el punto P_1 dicha matriz es

$$J(F,G)(0,0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son 10 y 16, ambos positivos. Aplica el Teorema de Hartman Grobman y, de acuerdo a él, el punto (0, 0) es un repulsor **inestable** del sistema

- En el punto P_2

$$J(F,G)(10,0) = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son -10 y $6,$ de distinto signo. Aplica el Teorema de Hartman Grobman y, de acuerdo a él, el punto (10, 0) es un nodo **inestable** del sistema

- En el punto P_3

$$J(F,G)(0,16) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -16 & -16 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son 2 y $-16,$ de distinto signo. Nuevamente aplica el Teorema de Hartman Grobman y, de acuerdo a él, el punto (0, 16) es un nodo **inestable** del sistema

- Finalmente, en el punto P_4

$$J(F,G)(4,12) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -12 & -12 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $-8 \pm \sqrt{40},$ ambos negativos. Por el Teorema de Hartman Grobman el punto (4, 12) es un atractor (asintóticamente) **estable** del sistema

4. Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x^2 - x \end{cases}$$

es hamiltoniano. Encuentre una función hamiltoniana para el sistema y, **usando tal función**, analice la estabilidad de los puntos críticos del sistema

Solución : Sean $F(x,y) = y; \quad G(x,y) = x^2 - x.$

Como $G_y = -F_x = 0,$ el sistema es hamiltoniano.

Observamos que los dos puntos críticos del sistema son $P_1(0,\,0)$ y $P_2(1,\,0)$

Buscamos pues función $H(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} H_x &= x^2 - x \\ H_y &= -y \end{cases}$$

Integrando la primera respecto a x tenemos que

$$H(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \varphi(y).$$

Derivando lo obtenido respecto a y obtenemos

$$H_y(x,y) = \varphi'(y) = -y,$$

por la segunda ecuación. Luego, $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y por tanto,

$$H(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\,.$$

Como el hessiano del sistema es $\mathcal{H}(x,y) = 1 - 2x$ tenemos que en $\mathcal{H}(x,y)(P_1) = 1 > 0$ de donde $P_1 = (0,0)$ es centro **estable** del sistema, en tanto que que $\mathcal{H}(x,y)(P_2) = -1 < 0$ de modo que $P_1 = (1,0)$ es nodo **inestable**