Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre de 2023

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Examen

1. Considere el PVI:
$$\begin{cases}(x-1)y' = y+1\\ y(a) = b.\end{cases}$$

   a) Muestre que para $a = 1$ y $b \neq -1$ el PVI no tiene solución.

   b) Muestre que para todo C en $\mathbb{R}$ la función $y(x) = -1 + C(x-1)$ es una solución de la ecuación
$$(x-1)y' = y+1.$$
   Concluya que para $a = 1$ y $b = -1$ el PVI tiene infinitas soluciones.

   c) Encuentre todos los pares (a, b) tales que el PVI tiene una única solución.

Solución.

a) Si la función y cumple la condición inicial $y(1) = b$ con $b \neq -1$ entonces la ecuación diferencial no se cumple en $x = 1$. En efecto, el lado izquierdo de la ecuación da 0 pero el lado derecho da un número distinto de cero. Por lo tanto no se puede satisfacer la condición inicial y la ecuación diferencial al mismo tiempo. Luego, el PVI no tiene solución.

b) Para cada C en $\mathbb{R}$ la función $y(x) = -1 + C(x-1)$ cumple que para todo x en $\mathbb{R}$,
$$(x-1)y' = (x-1)C = -1 + C(x-1) + 1 = y + 1.$$
Además, $y(1) = -1$. Luego, para cada C tenemos una solución al PVI con condición inicial $y(1) = -1$, y por lo tanto hay infinitas soluciones para este problema.

c) Para $a \neq 1$, podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad al PVI
$$\begin{cases}y' = \dfrac{y+1}{x-1}\\ y(a) = b.\end{cases}$$
pues la función $f(x, y) = \dfrac{y+1}{x-1}$ es continua en $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 1\}$ y la derivada parcial $\partial_y f$ es continua en el mismo conjunto. Luego, podemos concluir que el PVI original tiene una única solución para los pares (a, b) tales que $a \neq 1$. Por las partes *a*) y *b*) para los pares $(1, b)$ con b en $\mathbb{R}$ el PVI original no tiene solución o tiene infinitas soluciones. Luego, los pares (a, b) donde el PVI original tiene una única solución son los pares (a, b) tales que $a \neq 1$.

Evaluación.

a) 2 puntos por demostrar que el PVI no tiene solución.

b) 1 punto por verificar que las funciones dadas son soluciones del sistema, 0.5 puntos por mostrar que estas funciones son soluciones del PVI con condición inicial $y(1) = -1$, y por mostrar que este PVI tiene infinitas soluciones.

c) 2 puntos por aplicar correctamente el teorema de existencia y unicidad a los puntos (a, b) con $a \neq 1$.

2. Un tanque contiene 1000 L de una solución compuesta de 100 kg de sal disuelta en agua. Se bombea agua pura dentro del tanque a una razón de 5 L/s, y la mezcla que se conserva uniforme por agitación se bombea hacia afuera en la misma proporción. ¿Cuánto tiempo pasará para que queden solamente 10 kg de sal en el tanque?

   Solución. Denotemos por $C(t)$ la cantidad de sal en al tanque medida en kg en tiempo t medido en segundos. De acuerdo al enunciado $C(0) = 100$. Además como el volumen de agua es constante tenemos que la tasa a la cual sale sal del tanque es

$$\frac{C(t)}{1000} \cdot 5.$$

   Luego, la ecuación diferencial para la cantidad de sal en el tanque es

$$C' = -\frac{C}{200}.$$

   La solución general de esta ecuación diferencial es $C(t) = Ke^{-\frac{t}{200}}$ con K una constante real. Luego, $C(0) = 100$ implica que $K = 100$. Así la cantidad de sal en el tanque viene dada por $C(t) = 100e^{-\frac{t}{200}}$. Para calcular el tiempo t_0 que nos piden debemos resolver la ecuación

$$100e^{-\frac{t}{200}} = 10.$$

   Lo que nos da que

$$t_0 = 200 \ln 10.$$

   Evaluación.

   - 2 puntos encontrar la ecuación diferencial para la cantidad de sal.
   - 2 puntos por encontrar la solución general de la ecuación.
   - 1 punto por calcular la constante a partir de la condición inicial.
   - 1 punto por calcular t_0.

3. Resuelva, usando el método de variación de parámetros, el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

   Solución. La solución del sistema viene dada por la fórmula

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s = e^{At}\mathbf{x}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s, \tag{1}$$

   dónde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo, A es la matriz de coeficientes del sistema y $\mathbf{f}$ es el lado derecho. El término $\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\mathbf{x}_0$ o $e^{At}\mathbf{x}_0$ corresponde a la solución general del sistema homogéneo, y el término

$$\Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s \text{ o } e^{At} \int_0^t e^{-As}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s$$

es una solución particular. Ahora calcularemos esta solución particular. Para calcular e^{At} usamos la matriz fundamental del sistema homogéneo $\Phi(t)$ y la fórmula

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}.$$

La misma fórmula sirve para calcular e^{-As}. Así obtenemos que

$$e^{-As} = e^{A(-s)} = \Phi(-s)\Phi(0)^{-1}.$$

Usando como matriz fundamental del sistema homogéneo

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{-2t} \\ e^{5t} & -3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

y que

$$\Phi(0)^{-1} = \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos

$$e^{At} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6e^{5t} + e^{-2t} & 2e^{5t} - 2e^{-2t} \\ 3e^{5t} - 3e^{-2t} & e^{5t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-As}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s &= \int_0^t \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6e^{-5s} + e^{2s} & 2e^{-5s} - 2e^{2s} \\ 3e^{-5s} - 3e^{2s} & e^{-5s} + 6e^{2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2s}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4e^{-7s} + 3 \\ 2e^{-7s} - 9 \end{bmatrix}\mathrm{d}s = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -\frac{4}{7}e^{-7t} + 3t + \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7}e^{-7t} - 9t + \frac{2}{7} \end{bmatrix}. \quad (2) \end{aligned}$$

Así la solución particular es

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{At}\int_0^t e^{-As}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6e^{5t} + e^{-2t} & 2e^{5t} - 2e^{-2t} \\ 3e^{5t} - 3e^{-2t} & e^{5t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -\frac{4}{7}e^{-7t} + 3t + \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7}e^{-7t} - 9t + \frac{2}{7} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

También se puede calcular la solución particular usando la fórmula

$$\Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s.$$

En este caso

$$\Phi(s)^{-1} = \frac{-1}{7e^{3s}}\begin{bmatrix} -3e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{5t} & 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s &= \int_0^t \frac{-e^{-5s}}{7}\begin{bmatrix} -3e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{5t} & 2e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \frac{-e^{-5s}}{7}\begin{bmatrix} -2e^{-2s} \\ -3e^{5s} \end{bmatrix}\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2e^{-7s} \\ 3 \end{bmatrix}\mathrm{d}s = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -\frac{2}{7}e^{-7t} + \frac{2}{7} \\ 3t \end{bmatrix}, \quad (4) \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{-2t} \\ e^{5t} & -3e^{-2t} \end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -\frac{2}{7}e^{-7t} + \frac{2}{7} \\ 3t \end{bmatrix} = \frac{e^{-2t}}{49}\begin{bmatrix} -4 + 4e^{7t} + 21t \\ -2 + 2e^{7t} - 63t \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Sumando esta solución particular a la solución general del sistema homogéneo obtenemos la solución general del sistema.

Evaluación.

- 1 punto por cualquiera de las dos formulas en (1).
- 1 punto por la matriz fundamental del sistema homogéneo.
- 4 puntos por calcular la solución particular: divididos en 1 puntos por calcular $\Phi(s)^{-1}$ o e^{-As}, 2 punto por calcular la primitiva

$$\int_0^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s \text{ o } \int_0^t e^{-As}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s,$$

y 1 punto por calcular la solución particular usando cualquiera de las fórmulas

$$\Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s \text{ o } e^{At}\int_0^t e^{-As}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s.$$

4. Dado el sistema no lineal

$$x' = x(3-2y)$$

$$y' = y(-12+5x)$$

a) Determine los puntos críticos del sistema.

b) Para cada uno de los puntos críticos encontrados en la parte anterior, determine la linealización del sistema.

c) Para cada uno de estos puntos críticos decida si es: asintóticamente estable, asintóticamente inestable o, no se puede establecer la estabilidad del punto crítico.

Solución.

a) Los puntos críticos se calculan al igualar el lado derecho a cero, y son $(0,0)$ y $(12/5, 3/2)$.

b) La matriz jacobiana de la linealización en el punto crítico (x_0, y_0) es

$$J(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 3-2y & -2x \\ 5y & -12+5x \end{bmatrix}.$$

Luego, la linealización en $(0,0)$ es el sistema lineal con matriz

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix},$$

y la linealización en $(12/5, 3/2)$ es el sistema lineal con matriz

$$J(12/5,3/2) = \begin{bmatrix} 0 & -24/5 \\ 15/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) De la parte anterior tenemos que la linalización del punto crítico $(0,0)$ nos da un punto silla, que es asintóticamente inestable. Luego, $(0,0)$ es asistóticamente inestable en el sistema original. También de la parte anterior tenemos que el punto crítico $(12/5, 3/2)$ en el sistema linealizado es un centro, luego no podemos decidir si en el sistema original es asintóticamente estable o inestable.

Evaluación.

a) 1 punto por cada punto crítico.

b) 1 punto por cada matriz jacobiana.

c) 1 punto por clasificar correctamente cada punto crítico.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos