PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEMESTRE DE VERANO 2018

Interrogación 2
MAT1640 ⋆ ECUACIONES DIFERENCIALES

1. *a*) Verifique que $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$ son soluciones linealmente independientes del PVI

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

¿Por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad?

b) Determine una solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}y'' + 2y = \tan(2t) - \frac{1}{2}e^t$$

Solución:

a) Notemos que

- Notemos que $y_1'(x) = 2x$, $y_1''(x) = 2$. Luego

$$x^2y_1'' - 4xy_1' + 6y_1 = x^2 \cdot 2 - 4x \cdot 2x + 6x^2 = 2x^2 - 8x^2 + 6x^2 = 0$$

y como $y_1(0) = 0^2 = 0$, $y_1'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, entonces y_1 satisface PVI.

- Notemos que $y_2'(x) = 3x^2$, $y_2''(x) = 6x$. Luego

$$x^2y_2'' - 4xy_2' + 6y_2 = x^2 \cdot 6x - 4x \cdot 3x^2 + 6x^3 = 6x^3 - 12x^3 + 6x^3 = 0$$

y como $y_2(0) = 0^3 = 0$, $y_2'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, entonces y_2 satisface PVI.

Lo anterior no es una contradicción, pues lo que dice el teorema de existencia y unicidad es que el PVI tiene solución única en I si $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en I y $x_0 \in I$.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

Pero en este $p(x) = -\dfrac{4}{x}$ y $q(x) = \dfrac{6}{x^2}$ no son continuas en ningun intervalo que contenga al 0.

b) Primero buscamos la solución de la ecuación homogenea asociada $\frac{1}{2}y'' + 2y = 0$. El polinomio característico es $P(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + 2$ cuyas raíces son $\lambda = \pm 2i$. Luego la solución de la ecuación homogenea y_h esta dada por

$$y_h(t) = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t)$$

Para encontrar una solución particular encontramos soluciones particulares para los problemas

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 2\tan(2t) \quad (1)\\ y'' + 4y &= e^t \quad (2) \end{aligned}$$

- Ocupamos variación de parámetros para encontrar una solución de (1) de la forma $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ donde $y_1 = \cos(2x)$ y $y_2 = \mathrm{sen}(2x)$. Sabemos que u_1 y u_2 deben cumplir

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0\\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= 2\tan(2t) \end{aligned}$$

Luego si $W = \left|\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} \cos(2x) & \mathrm{sen}(2x) \\ -2\,\mathrm{sen}(2x) & 2\cos(2x) \end{smallmatrix}\right| = 2$, $W_1 = \left|\begin{smallmatrix} 0 & y_2 \\ 2\tan(2t) & y_2' \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{sen}(2x) \\ 2\tan(2t) & 2\cos(2x) \end{smallmatrix}\right| = -2\,\mathrm{sen}(2x)\tan(2t)$ y $W_2 = \left|\begin{smallmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 2\tan(2t) \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\,\mathrm{sen}(2x) & 2\tan(2t) \end{smallmatrix}\right| = 2\,\mathrm{sen}(2x)$

De lo anterior

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{W_1}{W}dx\\ &= -\int \mathrm{sen}(2x)\tan(2t)dx\\ &= 1/2\,\sin(2\,x) - 1/2\,\ln(\sec(2\,x) + \tan(2\,x))\\ u_2 &= \int \frac{W_2}{W}dx\\ &= \int \mathrm{sen}(2x)dx\\ &= -\frac{\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(2t) - \ln\left(\sec(2t) + \tan(2t)\right)\right)\cos(2t) - \frac{\cos(2t)\operatorname{sen}(2t)}{2} \\ &= -\frac{\cos(2t)}{2}\ln\left(\sec(2t) + \tan(2t)\right) \end{aligned}$$

- Ocupamos coeficientes indeterminados para encontrar una solución de (2) de la forma $y_p = Ae^t$. Reemplazando tenemos que

$$Ae^t + 4Ae^t = e^t \Rightarrow A = \frac{1}{5} \Rightarrow y_p = \frac{1}{5}e^t$$

Finalmente tenemos que la solución genereal del problema esta dado por

$$y(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t) - \frac{\cos(2t)}{2}\ln\left(\sec(2t) + \tan(2t)\right) - \frac{1}{5}e^t$$

2. Considere el siguiente problema:

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\beta t), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

con $\omega, \beta \in \mathbb{R}$. Determine para que valores de ω y β el problema anterior

a) tiene una única solución.

b) tiene infinitas soluciones.

c) no tiene solución.

Solución:

Debemos analizar cinco casos posibles:

- $\omega = 0$, $\beta = 0$.
  En este caso la ecuación se reduce a $y''(t) = 1$ que tiene por solución

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + At + B$$

  Si $y'(0) = 0$, entonces $A = 0$ y entonces $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ lo que no puede ser. Luego en este caso NO hay solución.

- $\omega = 0$, $\beta \neq 0$.
  En este caso la ecuación se reduce a $y''(t) = \cos(\beta t)$ que tiene por solución

$$y(t) = -\frac{\cos(\beta t)}{\beta^2} + At + B$$

  Si $y'(0) = 0$, entonces $A = 0$ y entonces $y'(1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\operatorname{sen}(\beta)}{\beta} = 0$ lo que solo ocurre si $\beta = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Luego hay infinitas soluciones si $\beta = k\pi$ (una para cada valor de B), con $k \in \mathbb{Z}$ y no hay solución en caso contrario.

- $\omega \neq 0$, $\beta = 0$.
  En este caso la ecuación se reduce a $y''(t) + \omega^2 y = 1$. La solución de la homogenea asociada es

$$y_h(t) = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)$$

  Y, por la forma de la ecuación, tenemos que una solución particular puede ser $y_p(t) = \dfrac{1}{\omega^2}$.

Luego la solución esta dada por

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega^2}$$

Si $y'(0) = 0$, entonces $B = 0$ y entonces $y'(1) = 0 \Leftrightarrow -A\,\mathrm{sen}(\omega) = 0$. Luego si $\omega = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces hay infinitas soluciones (una para cada posible valor de A). Si $\omega \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $A = 0$ y se tiene solución única $y(t) = \frac{1}{\omega^2}$.

- $\omega \neq 0$, $\beta \neq 0$ con $\omega \neq \beta$.
  En este caso la ecuación se reduce a $y''(t) + \omega^2 y = \cos(\beta t)$. La solución de la homogenea asociada es

$$y_h(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

  Y, ocupando coeficientes indeterminados, tenemos que una solución particular puede ser $y_p(t) = \frac{\cos(\beta t)}{\omega^2 - \beta^2}$.
  Luego la solución esta dada por

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{\cos(\beta t)}{\omega^2 - \beta^2}$$

  Si $y'(0) = 0$, entonces $B\omega = 0$ y, por lo tanto, $B = 0$. entonces $y'(1) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{-\beta\,\mathrm{sen}(\beta)}{(\omega^2 - \beta^2)\omega\,\mathrm{sen}(\omega))}$. Luego si $\omega = k\pi$ y $\beta \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces no hay solución. Si $\omega \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces tiene solución única (A esta bien definida). Si $\omega = k\pi$ y $\beta = h\pi$, con $k, h \in \mathbb{Z}$ y $k \neq h$, entonces hay infinitas soluciones (una para cada posible valor de A).
- $\omega \neq 0$, $\beta \neq 0$ con $\omega = \beta$.
  En este caso la ecuación se reduce a $y''(t) + \omega^2 y = \cos(\beta t)$. La solución de la homogenea asociada es

$$y_h(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

  Y, ocupando coeficientes indeterminados, tenemos que una solución particular puede ser $y_p(t) = \frac{t\,\mathrm{sen}(\beta t)}{2\beta}$.

Luego la solución esta dada por

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{t\,\mathrm{sen}(\beta t)}{2\beta}$$

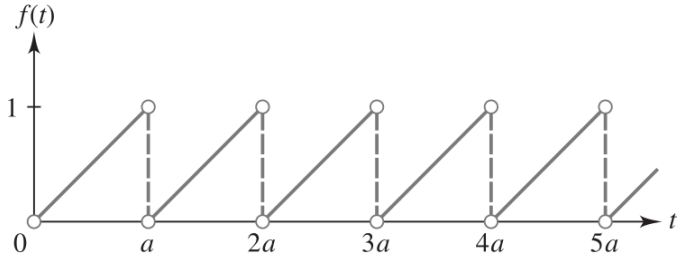
Si $y'(0) = 0$, entonces $B\beta = 0$ y, por lo tanto, $B = 0$. entonces $y'(1) = 0 \Leftrightarrow A = \dfrac{\mathrm{sen}(\beta) + \beta\cos(\beta)}{2\beta^2\,\mathrm{sen}(\beta)}$. Luego si $\beta = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces no hay soluciones. Si $\beta \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces tiene solución única.

3. Calcule

a) $\mathcal{L}\{f(t)\}$ si $f(t) = e^{5t}\operatorname{sen}^2(t)$

b) $\mathcal{L}\{f(t)\}$ si $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2\pi, \\ \cos(t) & \text{si } x \geq 2\pi. \end{cases}$

c) $\mathcal{L}\{f(t)\}$ si $f(t)$ es la función descrita en la siguiente figura:



d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+16}{s^2+4s+13}\right\}$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{e^{5t}\operatorname{sen}^2(t)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^2(t)\right\}(s+5) \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos(2t)}{2}\right\}(s+5) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\}(s+5) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s+5) \\
&= \frac{1}{2(s+5)} - \frac{s}{2(s+5)^2+8}
\end{aligned}$$

b) Como $f(t) = H_{2\pi}(t)\cos(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{H_{2\pi}(t)\cos(t)\}(s) \\
&= e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\cos(t+2\pi)\}(s) \\
&= e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) \\
&= \frac{e^{-2\pi s}s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

$c)$ La función $f(t)$ tiene periodo a y para $t \in [0, a)$ se tiene que $f(t) = \dfrac{t}{a}$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{\displaystyle\int_0^a e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-as}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a te^{-st}dt}{1 - e^{-as}} \\
&= \frac{1 - e^{-as}(as + 1)}{as^2(1 - e^{-as})}
\end{aligned}$$

4. Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo, un metro por debajo de la posición de equilibrio para el sistema masa-resorte y comienza a vibrar. Después de $\pi/2$ segundos, la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema queda descrito mediante el problema simbólico con valores iniciales

$$x''(t) + 9x(t) = -3\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

donde $x(t)$ denota el desplazamiento con respecto del equilibrio en el instante t. ¿Qué le ocurre a la masa después de ser golpeada?

Solución:

a) Al aplicar transformada de Laplace a ambos lados de la ecución se obtiene:

$$\mathcal{L}\{x''\} + 9\mathcal{L}\{x\} = -3\mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \Rightarrow s^2\mathcal{L}\{x\} - s + 9\mathcal{L}\{x\} = -3e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9}\right\} \\ &= \cos(3t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\text{sen}(3t)\}\right\} \\ &= \cos(3t) - H_{\frac{\pi}{2}}(t)\,\text{sen}\left(3t - \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Notemos que

$$\text{sen}\left(3t - \frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\,(3t)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos\,(3t) = \cos(3t)$$

Por lo que $x(t) = \cos(3t)(1 - H_{\frac{\pi}{2}}(t))$. De lo anterior se tiene que si $t > \dfrac{\pi}{2}$, entonces $x(t) \equiv 0$. Es decir, la masa permance detenida en su punto de equilibrio.

b) Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{2s+16}{s^2+4s+13} &= \frac{2s+16}{s^2+4s+4+9}\\ &= \frac{2s+16}{(s+2)^2+9}\\ &= \frac{2s+4+12}{(s+2)^2+9}\\ &= 2\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+4\frac{3}{(s+2)^2+9}\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+16}{s^2+4s+13}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{2\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+4\frac{3}{(s+2)^2+9}\right\}\\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right\}+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+9}\right\}\\ &= 2e^{-2t}\cos(3t)+4e^{-2t}\operatorname{sen}(3t)\end{aligned}$$