PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
26 de noviembre de 2014.

MAT–1640 - ECUACIONES DIFERENCIALES
EXAMEN

1. Un ciclista sale de su hogar con una cantimplora conteniendo agua a una temperatura de 4°C en circunstancia que la temperatura ambiente es de 15°C. A los cinco minutos de viaje la temperatura del agua ha subido a 5°C y el ciclista continúa pedaleando por 10 minutos más, instante en que ingresa a su oficina, la que se encuentra a una temperatura de 20°C. Asumiendo que la temperatura del agua varía proporcionalmente a la diferencia entre el medio y el agua (donde la constante de proporcionalidad depende solamente del material de la cantimplora y no del medio en que se encuentre) ¿cuál será la temperatura del agua 10 minutos después de haber llegado a la oficina?

   Respuesta : Sea $x(t)$ la temperatura del agua (en grados centígrados), t minutos después de inciado el viaje y hasta el instante de ingresar a la oficina. El Problema de Valor Incial para $x(t)$ es, pues,

$$x' = k(15 - x); \qquad x(0) = 4; \qquad 0 \leq t \leq 15.$$

   La ecuación es de variables separables. Resolviéndola y evaluando la condición inicial

$$x(t) = 15 - 11e^{-kt}; \qquad 0 \leq t \leq 15.$$

   Como $x(5) = 5$, tenemos que $k = -\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{10}{11}\right)$ de donde tenemos

$$x(t) = 15 - 11e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{10}{11}\right)t}; \qquad 0 \leq t \leq 15.$$

   y por tanto, en el instante de ingresar a la oficina, la temperatura del agua en la cantimplora es

$$y_0 = x(15) = 15 - 11e^{3\ln\left(\frac{10}{11}\right)}.$$

   Sea ahora $y(t)$ la temperatura del agua t minutos después de de ingresar a la oficina. El Problema de Valor Incial para $y(t)$ es, pues,

$$y' = k(20 - y); \qquad y(0) = y_0; \qquad t \geq 0.$$

   siendo k e y_0 los valores calculados previamente. La solución del problema es

$$y(t) = 20 - \left(20 - \left(\underbrace{15 - 11\,e^{3\ln\left(\frac{10}{11}\right)}}_{y_0}\right)\right) e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{10}{11}\right)t}.$$

Necesitamos

$$y(10) \;=\; 20 \;-\; \left(5 \;+\; 11e^{\,3\ln\left(\frac{10}{11}\right)} \right) e^{\,2\,\ln\left(\frac{10}{11}\right)}$$

2. a) Hallar todas las funciones $f(t)$ para las cuales $\mu(x) = x$ es un factor integrante de la ecuación

$$f(x)\,dy \;+\; \left(x^2 \;+\; y\right)\,dx \;=\; 0.$$

Respuesta : La ecuación $xf(x)\,dy + (x^3 \;+\; xy)\,dx \;=\; 0$ es exacta. Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xf(x)\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + xy\right) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + xf'(x) \;=\; x.$$

Se trata de una ecuación lineal de primer orden para $f(x)$ mla que se resuelve por el algoritmo habitual:

$$\begin{aligned} f'(x) \;+\; \frac{1}{x}\,f(x) \;&=\; 1 \\ &\Downarrow \\ f(x) \;&=\; e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(\int e^{\int \frac{dx}{x}}\,dx \;+\; C \right) \\ &\Downarrow \\ f(x) \;&=\; \frac{x}{2} + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

b) Dado que $y = \text{sen } x$ es una solución de la E.D.O.

$$y^{iv} \;-\; 4y''' \;+\; 5y'' \;-\; 4y' \;+\; 4y \;=\; 0$$

encuentre la solución general de dicha ecuación.

Respuesta : El polinomio característico asociado a esta ecuación es

$$p(x) \;=\; x^4 \;-\; 4x^3 \;+\; 5x^2 \;-\; 4x \;+\; 4.$$

La solución entregada implica que este polinomio posee las raíces $\pm i$ y por ende es divisible por $(x + i)(x - i) = x^2 + 1$.

Dividiendo obtenemos

$$p(x) \;=\; (x^2 + 1)\,(x^2 - 4x + 4) \;=\; (x^2 + 1)\,(x - 2)^2$$

Así, las raíces son $\pm i$ y 2 (con multiplicidad dos) lo cual implica que la ecuación posee las soluciones fundamentales

$$y_1 \;=\; \text{sen } x; \quad y_2 \;=\; \cos x; \quad y_3 \;=\; e^{2x}; \quad y_4 \;=\; xe^{2x}$$

y la solución general es, por tanto,

$$y(x) \;=\; C_1 \,\text{sen } x \;+\; C_2 \cos x \;+\; C_3 e^{2x} \;+\; C_4 x e^{2x}.$$

3. a) **(2 ptos.)** Calcule la matriz A si

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Respuesta : Si escribimos $\Phi(t) = e^{At}$, se cumple que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ (por tratarse de una matriz fundamental).

Entonces, evaluando en $t = 0$ obtenemos $\Phi'(0) = A\Phi(0) = B$, pues $\Phi(0) = e^{A\cdot 0} = I$.

Por tanto, $A = \Phi'(0)$.

Derivando tenemos que

$$Phi'(t) = \begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t & 4e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 6e^{2t} - 3e^t & 6e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 4e^{2t} \end{pmatrix}.$$

y por tanto, evaluando en $t = 0$ llegamos a que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) **(4 ptos.)** Resolver el sistema

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Respuesta : La solución buscada viene dada por

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\vec{x}(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{f}(s)\,ds$$

siendo $\Phi(t)$ cualquier matriz fundamental y $\vec{f}(s) = \begin{pmatrix} e^{5s} \\ 4 \end{pmatrix}$.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tiene valores propios} \quad \lambda_1 = 3 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 4.$$

y sus correspondientes vectores propios son

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Por tanto una matriz fundamental es $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

Entonces, $\Phi(s)^{-1} = \begin{pmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{f}(s)\,ds &= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{5s} \\ 4 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -2e^{2s} + 12e^{-3s} \\ e^{s} - 4e^{-4s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{2t} - 4e^{-3t} + 5 \\ e^{t} + e^{-4t} - 2 \end{pmatrix} \\
&= 5\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como los dos primeros términos son soluciones del sistema homogéneo (combinación lineal de las soluciones fundamentales) poddemos dejar sóla el tercer término.

Por otra parte,

$$\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6e^{3t} + 15e^{4t} \\ -6e^{3t} + 10e^{4t} \end{pmatrix}$$

de modo que la solución es

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -e^{3t} + 9e^{4t} + 2e^{5t} - 1 \\ -e^{3t} + 6e^{4t} + e^{5t} - 2 \end{pmatrix}.$$

4. a) El $(0,\,0)$ es el único punto de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y \\ \dfrac{dy}{dt} &= k(1-x^2)y - x \end{cases}$$

Determine su carácter (atractor, repulsor, centro o punto de silla) en función del parámetro k.

Respuesta : Observamos que si $k=0$ el sistema es lineal con matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyos valores propios son $\pm i,$ de modo que
Si $k=0,$ el origen es un centro (estable).

Para $k \neq 0$ la linealización del sistema cerca del origen es

$$\vec{x}\,' = A\,\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\dfrac{k}{2} \pm \dfrac{\sqrt{k^2-4}}{2}$.
Observamos que estos son reales si $|k| \geq 2$ y que, si $|k|>2$ entonces $\sqrt{k^2-4} < |k|$ de modo que ambos valores propios tienen el mismo signo, y éste es el signo de k.
Cuando $|k| = 2$ estamos en presencia de un valor propio único que tiene, nuevamente, el signo de k.

Por último, cuando $|k|<2$ los valores propios son complejos, con parte real no cero, del mismo signo que k.

Resumiendo,

- Si $k=0$ tenmos un centro estable
- Si $k>0$ tenemos un repulsor inestable (tipo espiral cuando $k<2$))
- Si $k<0$ tenemos un atractor asintt́oticamente estable (del tipo espiral si $k>-2$)

b) Muestre que el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 4-2y \\ \dfrac{dy}{dt} &= 2x-2 \end{cases}$$

es hamiltoniano. Encuentre una fuunción hamiltoniana asociada y usándola determine la estabilidad de su punto crítico.

Respuesta : Observamos que el único punto crítico es $P(1,\,2)$.

Como $G_y = -F_x = 0,$ por lo cual el sistema es hamiltoniano.

Buscamos pues función $H(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} H_x &= 2-2x \\ H_y &= 4-2y \end{cases}$$

Integrando la primera respecto a x tenemos que

$$H(x,y) \;=\; 2x - x^2 + \varphi(y).$$

Derivando lo obtenido respecto a y obtenemos

$$H_y(x,y) \;=\; \varphi'(y) \;=\; 4-2y,$$

por la segunda ecuación. Luego, $\varphi(y) = 4y - y^2$ y por tanto,

$$H(x,y) \;=\; 2x \,-\, x^2 \,+\, 4y \,-\, y^2.$$

Como su hessiano en P es $(-2)\cdot(-2) = 4 > 0$ concluímos que P es un **centro estable** del sistema.