MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 8)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

En la clase anterior...

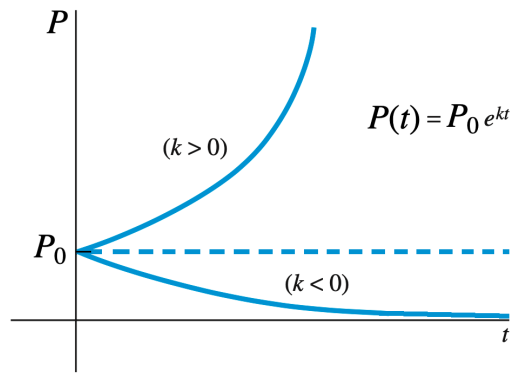
Comenzamos el estudio de modelos de crecimiento poblacional.

Modelo general: $\dfrac{dP}{dt} = (\beta(t) - \delta(t))P$

Algunas situaciones específicas nos motivan a estudiar:

- Modelo de crecimiento natural $\rightarrow$ $\dfrac{dP}{dt} = kP$
- Modelo logístico $\rightarrow$ $\dfrac{dP}{dt} = k(M - P)P$

Estudiamos el comportamiento de la solución al modelo de crecimiento poblacional en función del parámetro k.



Modelo logístico

Para $k, M, P_0 > 0$, resolvamos el PVI:

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)P, \quad P(0) = P_0.$$

La solución es:

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

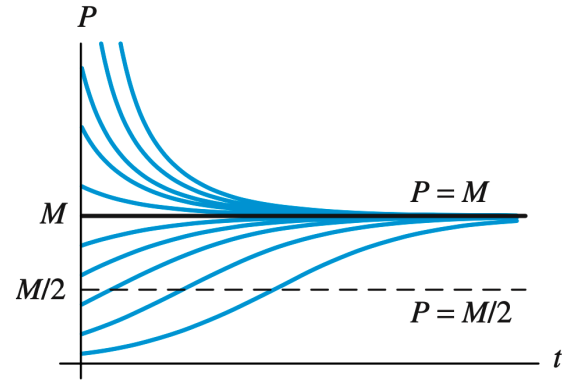


FIGURA 2.1.3. Curvas solución típicas para la ecuación logística $P' = kP(M - P)$. Cada curva solución que inicia debajo de la línea $P = M/2$ cuenta con un punto de inflexión.

Analicemos el modelo en términos de la condición inicial.

- Si $P_0 = M \quad \Rightarrow \quad$ P(t)=M (población en equilibrio)
- Si $0 < P_0 < M \quad \Rightarrow \quad P(t) < M, \quad P'(t) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = M,$
- Si $P_0 > M \quad \Rightarrow \quad P(t) > M, \quad P'(t) < 0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = M$

Conclusión: La población siempre converge a un tamaño poblacional límite M cuando $t \to \infty$ (M: capacidad máxima o población límite).

Una variante del modelo logístico es el:

Modelo de explosión/extinción demográfica

$P(t)$: población total de animales con una fracción fija α de machos y $1-\alpha$ de hembras.

- El número de nacimientos es proporcional a los encuentros entre machos y hembras:

$$\text{nacimientos} = \gamma \cdot \alpha P(t) \cdot (1-\alpha)P = kP^2 \quad \text{con} \quad k > 0.$$

- El número de muertes es proporcional al tamaño poblacional:

$$\text{muertes} = \delta P(t), \quad \delta > 0.$$

Luego, si $M = \delta/k > 0$,

$$\frac{dP}{dt} = k(P-M)P, \quad P(0) = P_0$$

- Si $P_0 = M \quad \Rightarrow \quad P(t) = M$
- Si $0 < P_0 < M \quad \Rightarrow \quad P(t) < M$
  $P'(t) < 0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = 0$
- Si $P_0 > M \quad \Rightarrow \quad P(t) > M,$
  $P'(t) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = +\infty$

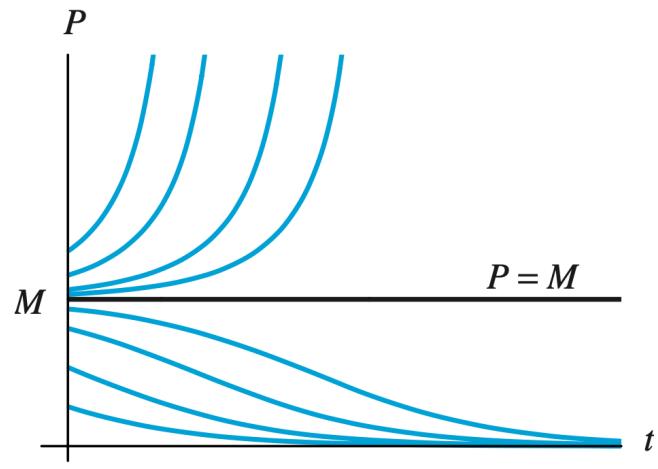


FIGURA 2.1.6. Curvas solución típicas para la ecuación explosión/extinción $P' = kP(P-M)$.

Ajuste del modelo logístico

En la práctica, es usual elegir un modelo (una EDO) y luego ajustar sus paramétros teniendo en cuenta un conjunto de datos obtenidos.

Ejemplos:

$P(t)$: población de Estados Unidos;
t: tiempo en años desde 1800 (es decir, $t = 0$ en 1800)

1) Se busca ajustar un modelo se crecimiento natural en base a los siguientes datos:

Año	N° de personas
1800	5.308 millones
1900	76.212 millones

$$\Rightarrow P_0 = 5.308, \quad k \approx 0.026643, \quad P(t) = (5.308)e^{(0.026643)t}$$

¿Cúal es el crecimiento porcentual de un año a otro? $\rightarrow$ 2.7% por año.

2) Se busca ahora ajustar un modelo logístico en base a los siguientes datos:

Año	N° de personas
1800	5.308 millones
1850	23.192 millones
1900	76.212 millones

$$\Rightarrow P_0 = 5.308, \quad k \approx 0.000167716, \quad M \approx 188.121$$

$$P(t) = \frac{998.546}{5.308 + (188.121)e^{-(0.031551)t}}$$

Obs. En este modelo el crecimiento porcentual por año no es constante

¿Cómo se comparan los modelos (ajustados) anteriores con los datos reales?

Año	Población real de Estados Unidos	Modelo exponencial	Error exponencial	Modelo logístico	Error logístico
1800	5.308	5.308	0.000	5.308	0.000
1810	7.240	6.929	0.311	7.202	0.038
1820	9.638	9.044	0.594	9.735	−0.097
1830	12.861	11.805	1.056	13.095	−0.234
1840	17.064	15.409	1.655	17.501	−0.437
1850	23.192	20.113	3.079	23.192	0.000
1860	31.443	26.253	5.190	30.405	1.038
1870	38.558	34.268	4.290	39.326	−0.768
1880	50.189	44.730	5.459	50.034	0.155
1890	62.980	58.387	4.593	62.435	0.545
1900	76.212	76.212	0.000	76.213	−0.001
1910	92.228	99.479	−7.251	90.834	1.394
1920	106.022	129.849	−23.827	105.612	0.410
1930	123.203	169.492	−46.289	119.834	3.369
1940	132.165	221.237	−89.072	132.886	−0.721
1950	151.326	288.780	−137.454	144.354	6.972
1960	179.323	376.943	−197.620	154.052	25.271
1970	203.302	492.023	−288.721	161.990	41.312
1980	226.542	642.236	−415.694	168.316	58.226
1990	248.710	838.308	−589.598	173.252	76.458
2000	281.422	1094.240	−812.818	177.038	104.384

FIGURA 2.1.4. Comparación de los modelos de crecimiento exponencial y logístico con el censo de población de Estados Unidos (en millones).

Modelo logístico:

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)P$$

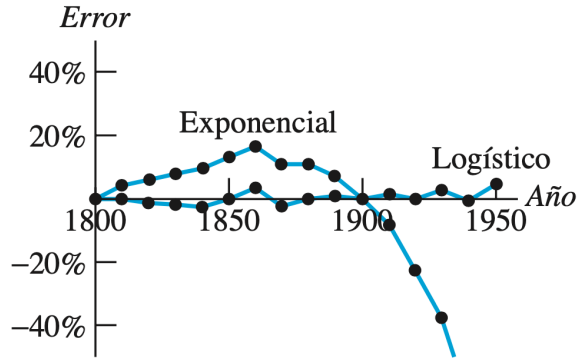


FIGURA 2.1.5. Porcentaje de error en los modelos de población exponencial y logístico para 1800-1950.

Obs. El modelo logístico fue ajustado en base a 3 datos. Es posible ajustarlo de mejor manera considerando los datos de la tabla anterior. Para esto se busca encontrar k y M que minimicen el error promedio (raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de los errores individuales).

El análisis cualitativo anterior es usual en la práctica.

Es común enfrentarse a EDO's que no son resolubles de manera explícita. En estos casos buscamos entender el **comportamiento cualitativo** de sus soluciones.

Por simplicidad, nos restringiremos a ecuaciones de la forma:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x)} \quad \longleftarrow \quad \text{EDO } \textbf{autónoma} \text{ (es decir, independiente de } t\text{)}$$

Para realizar un estudio cualitativo más sistemático de sus soluciones necesitamos de conceptos anteriores como: campo de pendientes, isoclinas, curvas solución; y otros nuevos como: diagrama de fase, punto crítico, solución de equilibrio, estabilidad e inestabilidad de puntos críticos.

Recordemos que...

dada una EDO autónoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

las **curvas isoclinas** (es decir, de igual pendiente) son lineas horizontales en el plano (t, x) de ecuación $f(x) = c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

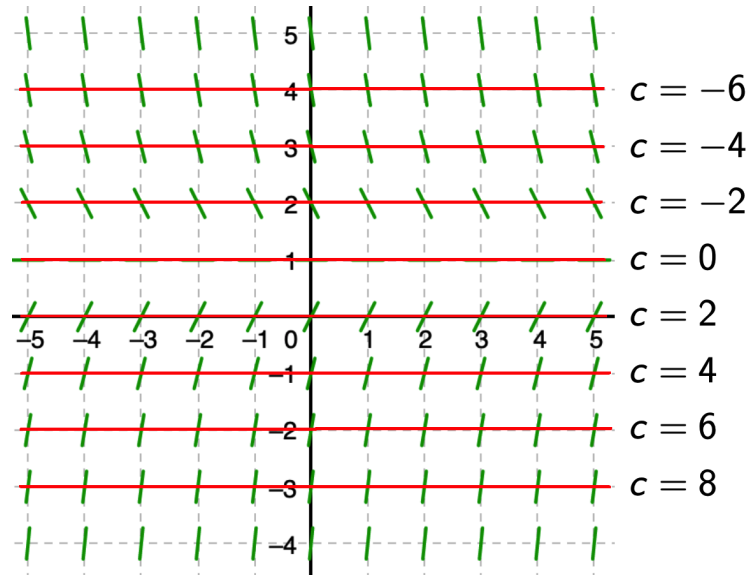
Ejemplo: $\dfrac{dx}{dt} = -2(x-1)$

Isoclina de pendiente c:

$$-2(x-1) = c, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c	8	6	4	2	0	-2	-4	-6
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Vemos que:
$f(x) > 0$ si $x < 1$; $f(x) < 0$ si $x > 1$



Isoclinas (rojo) y campo de pendientes (verde)

Recordemos además que...

llamamos **solución de equilibrio** a aquella que no varía en el tiempo, por lo tanto es constante $x(t) = x_0$.

En el caso de una EDO autónoma $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, llamamos **punto crítico** a los valores $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Cada punto crítico x_0 de $f(x)$ tiene asociado una solución de equilibrio $x(t) = x_0$.

Ejemplo: $\dfrac{dx}{dt} = \underbrace{-k(x - A)}_{f(x)}$

Punto crítico: $-k(x_0 - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = A$

Solución de equilibrio: $x(t) = A$