MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 18)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Vimos anteriormente:

- Un sistema lineal (de $n \times n$) de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

lo escribimos en su forma matricial como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

donde $\mathbf{x}(t) = [x_i(t)]$, $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]$ y $\mathbf{f}(t) = [f_i(t)]$.

- Los sistemas lineales aparecen en problemas prácticos y además, toda ecuación de orden superior (en forma normal) se puede transformar en un sistema de primer orden.

Vimos anteriormente:

Dos resultados generales para sistemas lineales de primer orden:

Teorema. [**Existencia y unicidad para sistemas lineales**]
Si todos los coeficientes $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ y las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son continuas en un intervalo $\mathcal{I}$ que contiene a un punto a, entonces, para cualquier $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, si $\mathbf{b} = [b_i]$, el PVI

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b}$$

tiene una única solución en $\mathcal{I}$.

Teorema. [**Principio de superposición para sistemas lineales homogéneos**] Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son soluciones del sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

en un intervalo $\mathcal{I}$, entonces para cualquier constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}_i(t)$$

es también una solución en $\mathcal{I}$.

Independencia lineal de soluciones y solución general

Def. Decimos que las funciones vectoriales $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ son **linealmente dependientes** en el intervalo $\mathcal{I}$ si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas nulas, tal que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = 0, \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

($\Rightarrow$ *una de ellas es combinación lineal de las otras*)

En caso contrario, decimos que son **lineamente independientes**.

Para determinar la dependencia/independencia lineal de funciones vectoriales usamos el concepto de **wronskiano**

$$\underbrace{W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)}_{W(t)} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Obs. n funciones vectoriales de n components

- Para funciones cualquiera $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$:
  - si $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ son l.d. en $\mathcal{I}$ entonces $W(t) = 0$ en todo $\mathcal{I}$
  - Si $W(t_0) \neq 0$ en algún $t_0 \in \mathcal{I}$ entonces $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ son l.i
- Para $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$:

Teorema. [Wronskiano de soluciones] Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son soluciones del sistema lineal homogéneo (de $n \times n$)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

en un intervalo $\mathcal{I}$ donde $\mathbf{P}(t)$ es continua, entonces, el wronskiano

$$W = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

satisface que

- $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ son l.d. en $\mathcal{I}$ si y sólo si $W(t) = 0$ en todo $\mathcal{I}$
- $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ son l.i. en $\mathcal{I}$ si y sólo si $W(t) \neq 0$ en todo $\mathcal{I}$

El principio de superposición y la independencia lineal dan paso a:

Teorema. [**Solución general del sistema homogéneo**]
Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo (de $n \times n$)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

en un intervalo $\mathcal{I}$ donde $\mathbf{P}(t)$ es continua, toda solución del sistema se obtiene como una combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

para todo $t \in \mathcal{I}$.

Otra forma de escribir la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}$$

donde $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \ldots \ c_n]^T$ y $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t)\, \mathbf{x}_2(t) \ \ldots \ \mathbf{x}_n(t)]$ es la matriz de soluciones linealmente independientes.

Nos enfocamos ahora en el problema de valor inicial para la ecuación homogénea:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b}$$

con $a \in \mathcal{I}$.

El teorema anterior nos sugiere buscar una solución de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)c$$

(suponiendo que conocemos n soluciones l.i.) tal que

$$\mathbf{x}(a) = \underbrace{\mathbf{X}(a)c = \mathbf{b}}_{\text{sistema de ecuaciones para } \mathbf{c}}$$

Notar que el sistema algebraico $\mathbf{X}(a)c = \mathbf{b}$ tiene solución ya que $\mathbf{X}(a)$ es invertible ¿Por qué?

Resolvemos $\mathbf{X}(a)c = \mathbf{b}$ llevándolo a forma triangular superior

Repaso de triangulación de un sistema algebraico

Pare resolver el sistema $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$ estudiamos la matriz aumentada

$$\left[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\right]$$

y realizamos operaciones elementales para transformar el sistema en

$$\left[\bar{\mathbf{A}} \mid \bar{\mathbf{b}}\right]$$

con $\bar{\mathbf{A}}$ una matriz triangular superior

Operaciones elementales de reglones (fila de la matriz aumentada)

- Multiplicar relgón por constante (no cero)
- Intercambiar un reglón por otro
- Sumar/Restar un múltiplos constante de un reglón a otro

Consideremos ahora el sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t).$$

Def. Llamamos **solución complementaria** a la solución general de la ecuación homogénea.

Teorema. [**Solución general del sistema no homogéneo**]
Sea $\mathbf{x}_p$ una solución particular del sistema no homogéneo con $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ funciones continuas en el intervalo $\mathcal{I}$. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo en $\mathcal{I}$. Luego, toda solución al sistema no homogéneo en $\mathcal{I}$ se obtiene mediante la fórmula

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)}_{\mathbf{x}_c(t)} + \mathbf{x}_p(t).$$

Nuestro siguiente objetivos serán:

- aprender a calcular la solución complementaria.
- aprender a encontrar una solución particular.