Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2014

MAT1640 ⋆ Ecuaciones Diferenciales

Pauta Interrogación 3

1. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Exprese e^{At} en términos de I, A y funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   (**Sugerencias.** • La matriz A satisface $A^2 = cA$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.
   • No intente calcular los vectores y valores propios de A.)

   b) Resuelva el sistema
$$x'(t) = Ax(t) + e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Solución.

   a) Tenemos que $A^2 = 3A$ y es sencillo ver que $A^n = 3^{n-1}A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Se sigue que la matriz exponencial es igual a
$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}t^n}{n!} = I + \frac{1}{3}A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3t)^n}{n!} = I + \frac{1}{3}A(e^{3t} - 1).$$

   b) La solución del problema con valores iniciales está dada por
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot \begin{pmatrix} e^s \\ e^s \\ e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{3t-2s} + 2e^s \\ -e^{3t-2s} + 4e^s \\ e^{3t-2s} + 2e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{3t} + 3e^t - 4 \\ -e^{3t} + 9e^t - 8 \\ e^{3t} + 3e^t - 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{3t} + 3e^t - 10 \\ -e^{3t} + 9e^t + 4 \\ e^{3t} + 3e^t + 14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. a) Resolver el problema con valores iniciales
$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Determinar una solución general de

$$x'(t) = Ax(t), \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

a) La matriz tiene valores propios $\lambda_1 = -1 + 2i$ y $\lambda_2 = -1 - 2i$. El vector propio asociado al vector propio λ_2 es $v = (1, i/2)^T$. Entonces, la solución general de $x' = Ax$ está dada por

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

donde

$$x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}, \qquad x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(2t) \\ \frac{1}{2}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Para satisfacer la condición inicial $x(0) = (2, 3)^T$, se obtiene que $c_1 = 2$ y $c_2 = 6$.

b) La matriz A tiene el valor propio repetido $\lambda = 1$ con multiplicidad 3 y dos vectores propios asociados linealmente independientes

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\lambda = 1$ tiene solo dos vectores propios linealmente independientes, se necesita un vector propio generalizado de rango 2 y de este modo una solución v_2 diferente de cero de la ecuación

$$(A - I)^2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = 0$$

Elegimos $v_2 = (0, 1, 0)^T$ que es un vector que satisface lo pedido, y se encuentra que

$$(A - I)v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = v_1$$

Finalmente, hacemos la elección $v_0 = u_1 + u_2 = (-2, 1, 1)^T$ y obtenemos que una solución general es

$$x(t) = c_1 v_0 e^t + c_2 v_1 e^t + c_3(v_1 t + v_2)e^t\,.$$

3. Encuentre los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} x' &= -2xy \\ y' &= -x + y + xy - y^3 \end{cases}$$

y estudie la estabilidad de cada uno de ellos.

Solución. El sistema tiene tres puntos críticos $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$.
La matriz jacobiana de las funciones $f(x, y) = -2xy$ y $g(x, y) = -x + y + xy - y^3$ es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -1 + y & 1 + x - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Para $(0,0)$ la linealización del sistema es el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcl} u' &=& 0 \\ v' &=& -u+v \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{c} u' \\ v' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right).$$

Formamos la ecuación característica para el sistema

$$\left|\begin{array}{cc} -\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{array}\right| = -\lambda(1-\lambda) = 0$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, se sigue que el punto crítico $(0,0)$ es inestable.

(ii) Para $(0,1)$ la linealización del sistema es el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcl} u' &=& -2u \\ v' &=& -2v \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{c} u' \\ v' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right).$$

Formamos la ecuación característica para el sistema

$$\left|\begin{array}{cc} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{array}\right| = (\lambda+2)^2 = 0$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -2$, se sigue que el punto crítico $(0,1)$ es asintóticamente estable.

(iii) Para $(0,-1)$ la linealización del sistema es el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcl} u' &=& 2u \\ v' &=& -2u-2v \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{c} u' \\ v' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right).$$

Formamos la ecuación característica para el sistema

$$\left|\begin{array}{cc} 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2-\lambda \end{array}\right| = (\lambda-2)(\lambda+2) = 0$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$, se sigue que el punto crítico $(0,-1)$ es inestable.

4. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$x'' + x'(1+x^2) + 3x = 0\,.$$

a) Escriba esta ecuación como un sistema de 2×2 no lineal de orden 1 y encuentre los puntos críticos.

b) Encuentre una función de Lyapunov para el sistema y caracterice la estabilidad de los puntos críticos.

c) Interprete que significa para el sistema original la existencia de los puntos críticos encontrados.

Solución.

a) La ecuación $x'' + x'(1+x^2) + 3x = 0$ equivale al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& y \\ y' &=& -3x-(1+x^2)y \end{array}\right.$$

El único punto crítico de esta ecuación es el origen $(0,0)$.

b) La función de Lyapunov para el sistema es $E(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
Por lo que podemos concluir que $(0,0)$ es estable. Note que la función

$$F(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x} f_1 + \frac{\partial E}{\partial y} f_2 = 3xy + y(-3x - (1+x^2)y) = -(1+x^2)y^2$$

es negativa semidefinida, por lo que no podemos asegurar que el origen sea asintóticamente estable.

c) Que el origen $(0,0)$ sea estable significa que si partimos con posición y velocidad cercanas al origen el sistema mantedrá posiciones cercanas al origen. En otras palabras, las trayectorias permenecen cercanas a un punto crítico estable.