Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Pauta Interrogación 1

1. Demuestre que si $\alpha \geq 1$, el problema de valores iniciales,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^{\alpha}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

tiene una solución única en algún intervalo que contiene a $x = 0$.

Solución Por el teorema de existencia y unicidad, sabemos que el problema de valores iniciales

$$y'(x) = f(x, y),$$
$$y(0) = 1,$$

tiene solución única si f y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ están definidas y son continuas en una región $]X_0, X_1[\times]Y_0, Y_1[$ que contenga el punto $(0, 1)$. En nuestro caso,

$$f(x, y) = y^{\alpha}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha y^{\alpha-1}.$$

Luego f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ están definidas y son continuas en todo rectángulo que contenga el punto $(0, 1)$, lo que permite aplicar el teorema de existencia y unicidad para concluir que hay una solución única definida en algún intervalo en torno a 0 .

2. Encuentre la solución particular del problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy'(x) = 4(x^2 - y(x)), \\ y(-1) = 0, \end{cases}$$

y determine el intervalo más grande posible de definición de la solución.

Solución La ecuación diferencial es lineal para $x \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y = 4x.$$

El factor integrante es

$$e^{\int \frac{4}{x}\, dx} = e^{4\ln(|x|)} = |x|^4 = x^4.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^4\left(\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y\right) &= 4x^5, \\ \frac{d}{dx}(x^4 y(x)) &= 4x^5, \\ x^4 y(x) &= \frac{4}{6}x^6 + C \\ y(x) &= \frac{2}{3}x^2 + \frac{C}{x^4} \end{aligned}$$

la solución general.

Sustituir la condición inicial en la solución general entrega $\frac{2}{3} + C = 0$, por lo tanto $C = -\frac{2}{3}$ y

$$y(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3x^4}$$

es la solución particular para $x < 0$.

3. Determine una solución general implícita de la ecuación

$$y' = \frac{3x^2 y}{y + x^3}$$

Pista: Puede intentar con un cambio de variable $y = z^\alpha$, para algún α, para convertir la ecuación en homogénea.

Solución Si hacemos $y = z^\alpha$ se tiene $y' = \alpha z^{\alpha-1}$. Reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned} \alpha z^{\alpha-1} z' &= \frac{3x z^\alpha}{z^\alpha + x^3} \\ \Longrightarrow z' &= \frac{3x^2 z}{\alpha(z^\alpha + x^3)} \end{aligned}$$

Si elegimos $\alpha = 3$ la EDO queda homogénea:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{x^2 z}{z^3 + x^3} \\ \Longrightarrow z' &= \frac{\frac{z}{x}}{(\frac{z}{x})^3 + 1} \end{aligned}$$

Sea $v = \dfrac{z}{x}$. Así:

$$v'x + v = \frac{v}{v^3 + 1}$$
$$\implies xv' = \frac{-v^4}{v^3 + 1}$$

lo que corresponde a una ecuación de variables separables. Por lo tanto:

$$\int \frac{v^3 + 1}{v^4} dv = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\implies \ln|v| - \frac{1}{3v^3} = -\ln|x| + C$$
$$\implies \ln\left|\frac{z}{x}\right| - \frac{x^3}{3z^3} = -\ln|x| + C$$
$$\implies \ln\left|\frac{\sqrt[3]{y}}{x}\right| - \frac{x^3}{3y} = -\ln|x| + C.$$

4. La población $P(t)$ de animales en una isla en tiempo t tiene una tasa de natalidad n constante. La tasa de mortalidad aumenta con el tamaño de la población como $m = m_0 + m_1 P(t)$.

   (a) Encuentre la ecuación diferencial que modela la evolución de la población.

   (b) Encuentre los puntos críticos de la ecuación diferencial.

   (c) Si $n = 10000$, $m_0 = 6000$, y $m_1 = 10$, ¿cuál es la población máxima para $t \to \infty$?

   Solución

   (a) El cambio de población es la diferencia entre la natalidad y la mortalidad:

   $$\Delta P = nP\Delta t - (m_0 + m_1 P)\, P\Delta t$$

   lo cual resulta en

   $$P'(t) = nP(t) - (m_0 + m_1 P(t))\, P(t)$$

   para $\Delta t \to 0$.

   (b) La ecuación diferencial es equivalente a

   $$P'(t) = m_1 P(t)\left(\frac{n - m_0}{m_1} - P(t)\right)$$

   la cual es autónoma con puntos críticos 0 y $(n - m_0)/m_1$.

   (c) Dado que $m_1 > 0$, el punto crítico $(n - m_0)/m_1$ es estable. Por lo tanto, la población máxima para $t \to \infty$ está dado por $(n - m_0)/m_1 = 400$.

5. (a) Justifique si las funciones x^4 y x^3 son linealmente dependientes o independientes en todo $\mathbb{R}$.

   (b) Justifique si existe o no una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

   con coeficientes continuos, definida en el intervalo $(-1, 1)$ que tenga a $y_1(x) = x^4$ e $y_2(x) = x^3$ como dos soluciones linealmente independientes en ese intervalo. En caso afirmativo, muestre explícitamente un ejemplo de ecuación.

Solución

(a) Sean α, β escalares que $\alpha x^4 + \beta x^3 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 1$, entonces $\alpha + \beta = 0$. Si $x = -1$ entonces $\alpha - \beta = 0$. Esto implica que $\alpha = \beta = 0$ y por lo tanto son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

(b) El wronskiano de las funciones es

$$W = \begin{vmatrix} x^4 & x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 \end{vmatrix} = -x^6$$

el cual se anula únicamente en $x = 0$. Por lo tanto la ecuación del enunciado no puede existir ya que por el teorema del wronskiano visto en clases, W debe ser identicamente nulo o diferente de 0 en todo intervalo de definición $(-1, 1)$.