Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2025

MAT1640 - Ecuaciones diferenciales ordinarias
Interrogación 3

1. **(6 ptos)** Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{X}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución. El polinomio característico asociado a la matriz A es

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2),$$

con valores propios $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1 + i,\ \lambda_3 = 1 - i$.

- Para $\lambda_1 = 2$, se obtiene el vector propio $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Para $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$ se obtiene los vectores propios $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.
  La solución general del sistema es de la forma

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} v_1 + c_2 \Big(\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(1+i)t} v_2 \Big) + c_3 \Big(\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{(1+i)t} v_2 \Big), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

  o sea

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \mathrm{e}^{2t} - c_2 \mathrm{e}^t \sin t + c_3 \mathrm{e}^t \cos t \\ c_1 \mathrm{e}^{2t} - c_2 \mathrm{e}^t \cos t - c_3 \mathrm{e}^t \sin t \\ c_1 \mathrm{e}^{2t} + c_2 \mathrm{e}^t \cos t + c_3 \mathrm{e}^t \sin t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Usando la condición $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se obtiene las constantes $c_1 = c_3 = 0$ y $c_2 = 1$ y por lo tanto la solución del problema de valor inicial es

$$X(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Asignación de puntaje

- Asignar **(1.5 ptos)** por determinar correctamente el polinomio característico. Descontar **(0.5 pto)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar los valores propios.
- Asignar **(1.5 ptos)** por determinar los vectores propios asociados (se asigna **(0.5 pto)** por cada vector propio).
- Asignar **(1.5 ptos)** por determinar la solución general del sistema
- Asignar **(0.5 pto)** por usar la condición inicial y obtener las constantes c_1, c_2 y c_3.
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar la solución del problema considerado.

- **Observación.** En el caso que un alumno se equivoca en los valores/vectores propios pero aplica correctamente la metodología, se asigna al total **(3 ptos)**.

2. **(6 ptos)** Determine la solución general del sistema

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Solución 1. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$. El polinomio característico de A está dado por $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$. Notamos que el espacio propio $\ker(A - 2I)$ es de dimensión 1, con vector propio

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y un vector propio generalizado asociado a u_1 tal que $(A - 2I)u_2 = u_1$ es

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{Y}_0(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}u_1 + c_2\mathrm{e}^{2t}(u_2 + tu_1) = c_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En particular,

$$\mathbf{Y}_0(t) = \Phi(t)\mathbf{c} \quad \text{para} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

y donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental dada por

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{pmatrix}$$

cuya inversa es

$$\Phi^{-1}(t) = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinamos una solución particular para el sistema no homogéneo de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_p(t) &= \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)f(t)\mathrm{d}t \\ &= \Phi(t)\int \begin{pmatrix} -t\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \Phi(t)\begin{pmatrix} (1+t)\mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se podría también determinar una solución particular usando el método de coeficientes indeterminados $\mathbf{Y}_p(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{y}$.

Luego, la solución general es

$$\mathbf{Y}(t) = c_1e^{2t}u_1 + c_2\mathrm{e}^{2t}(u_2 + tu_1) = c_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1-t\end{pmatrix} + \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución 2. Notamos que $(A-2I)^2 = 0$ por lo tanto la matriz $A-2I$ es nilpotente de orden 2 lo que permite calcular directamente la matriz exponencial usando $\mathrm{e}^{t(A-2I)} = I + t(A-2I)$ y que $\mathrm{e}^{t(A-2I)} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{-2tI}$ por que $AI = IA$ (ambas matrices conmuten) o sea

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA} &= \mathrm{e}^{2t}\Big(I + t(A-2I)\Big)\\ &= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1+t & t\\ -t & -t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Después la solución general esta dada por

$$\mathbf{Y}(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathbf{c} + \int \mathrm{e}^{(t-s)A}f(s)\mathrm{d}s.$$

Asignación de puntaje

- Asignar **(1 pto)** por determinar correctamente el único valor propio $\lambda = 2$.
- Asignar **(1 pto)** por determinar un vector propio asociado.
- Asignar **(1 pto)** por determinar un vector propio generalizado asociado.
- Asignar **(1 pto)** por determinar la solución general $\mathbf{Y_0}$ del sistema homogéneo. Descontar (**(0.5 pto)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(1 pto)** por determinar correctamente una solución particular del sistema no homogéneo usando los métodos de variación de parámetros o de coeficientes indeterminados.
- Asignar **(1 pto)** por expresar la solución general del sistema completo.

3. Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) **(3 ptos)** La matriz

   $$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin t \\ \sin t & 1 \end{pmatrix}$$

   es una matriz fundamental de un sistema lineal $X' = A(t)X$ con A continua y definida en todo $\mathbb{R}$.

   (b) **(3 ptos)** El siguiente sistema autónomo

   $$\begin{cases} x' = y - x(x^4 + 2y^4) \\ y' = -x - y(x^4 + 2y^4), \end{cases}$$

   tiene un único punto de equilibrio que es $(0, 0)$.

Solución.

(a) **Falsa.** Como $\det \Phi(t) = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ entonces $\Phi(t)$ sólo será una matriz fundamental de $X' = A(t)X$ si $t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$.

(b) **Verdadera.** Claramente $(0, 0)$ es un punto de equilibrio para el sistema porque $f(0, 0) = (0, 0)$ donde

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y - x(x^4 + 2y^4) \\ -x - y(x^4 + 2y^4) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, sea (x_0, y_0) otro punto de equilibrio tal que $x_0 \neq 0$ y $y_0 \neq 0$ (porque si $x_0 = 0$ entonces $y_0 = 0$ y viceversa). Entonces tenemos

$$\begin{cases} y_0 - x_0(x_0^4 + 2y_0^4) = 0 \\ -x_0 - y_0(x_0^4 + 2y_0^4) = 0, \end{cases}$$

tal que $x_0^4 + 2y_0^4 = \frac{y_0}{x_0}$ y $x_0^4 + 2y_0^4 = -\frac{x_0}{y_0}$ y por lo tanto tendremos

$$0 = \frac{y_0}{x_0} + \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 y_0}$$

que es imposible cuando $x_0 \neq 0$ y $y_0 \neq 0$.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(1 pto)** por responder falsa.
- Asignar **(1 pto)** por calcular $\det \Phi(t)$ y analizar la invertibilidad de la matriz Φ.
- Asignar **(1 pto)** por justificar correctamente que Φ no puede ser una matriz fundamental de un sistema lineal $X' = AX$ con A continua en todo $\mathbb{R}$ mientras que no es invertible en todo $\mathbb{R}$.

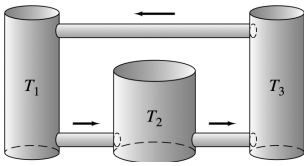
(b)
- Asignar **(1 pto)** por responder verdadera.
- Asignar **(1 pto)** por comprobar que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.
- Asignar **(1 pto)** por demostrar que es el único.

4. **(6 ptos)** Tres tanques de fermentación están conectados como se indica en la figura según un sistema cerrado, y las mezclas en los tres se conservan uniformes por agitación. Sea $x_i(t)$ la cantidad (en gramos) de sal en el tanque T_i en el tiempo t para $i \in \{1, 2, 3\}$. Supongamos que la mezcla circula entre los tanques a una velocidad de 10 L.min^{-1} y que los volúmenes iniciales en cada tanque son

$$V_1 = 20 \text{ L}, \ V_2 = 50 \text{ L}, \ V_3 = 100 \text{ L}.$$

(a) Demuestre que las ecuaciones siguientes modelan la dinámica de la concentración de solución en los tanques

$$\begin{cases} 10x_1' = -5x_1 + x_3 \\ 10x_2' = 5x_1 - 2x_2 \\ 10x_3' = 2x_2 - x_3. \end{cases}$$



(b) Desconectamos los tanques T_1 y T_3. Para mantener el volumen, el tanque T_1 sigue recibiendo agua limpia mientras que la mezcla se bombea del tanque T_3 hacia afuera. Determine en este caso, el nuevo sistema y la cantidad de sal que contiene cada tanque pasado 20 minutos sabiendo que las cantidades iniciales de sal son $x_1(0) = 6, \ x_2(0) = 0, \ x_3(0) = 0$.

Solución.

(a) ✓ El sistema correspondiente a los tres tanques conectados es

$$\begin{cases} x_1' = -k_1x_1 + k_3x_3 \\ x_2' = k_1x_1 - k_2x_2 \\ x_3' = k_2x_2 - k_3x_3 \end{cases}$$

donde $k_i = \frac{10}{V_i}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Como $k_1 = \frac{1}{2}, \ k_2 = \frac{1}{5}, \ k_3 = \frac{1}{10}$ entonces se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} 10x_1' = -5x_1 + x_3 \\ 10x_2' = 5x_1 - 2x_2 \\ 10x_3' = 2x_2 - x_3. \end{cases}$$

(b) Ahora el sistema que describe la cantidades de sal en los tres tanques está dado por

$$\begin{cases} x_1' = -k_1x_1 \\ x_2' = k_1x_1 - k_2x_2 \\ x_3' = k_2x_2 - k_3x_3 \end{cases}$$

o sea

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{1}{2}x_1 \\ x_2' = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \\ x_3' = \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{10}x_3. \end{cases}$$

Sean $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y reescribimos el sistema de forma matricial tal que $X' = TX$ donde la matriz T asociada al sistema está dada por

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Es una matriz triangular inferior cuyos valores propios son los elementos diagonales $\lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{5},\ \lambda_3 = -\frac{1}{10}$ y los vectores propios asociados son

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particular, una matriz fundamental del sistema es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema con la condición inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ está dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi(t)\Phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ -10\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 10\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \\ 5\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - 20\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 15\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particular, las cantidad de sal contenidas en cada tanque después de 20 minutos son

$$\begin{cases} x_1(20) = 6\mathrm{e}^{-10} \\ x_2(20) = -10\mathrm{e}^{-10} + 10\mathrm{e}^{-4} \\ x_3(20) = 5\mathrm{e}^{-10} - 20\mathrm{e}^{-4} + 15\mathrm{e}^{-2}. \end{cases}$$

Asignación de puntaje

(a) Asignar **(1 pto)** por determinar correctamente el sistema diferencial que modela el sistema cerrado de tanques. Descontar **(0.5 pto)** si se comete a lo más un error.

(b)
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar correctamente el sistema diferencial que modela el sistema abierto de tanques después de desconectar los tanques T_1 y T_3.
- Asignar **(0.75 pto)** por determinar correctamente los tres valores propios (**(0.25 pto)** por cada valor propio).

- Asignar **(0.75 pto)** por determinar correctamente los vectores propios asociados (**(0.25 pto)** por cada vector propio).
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar la solución general del sistema (expresando las soluciones LI o una matriz fundamental asocial al sistema).
- Asignar **(0.5 pto)** por aplicar la condición inicial.
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar la solución del problema de valor inicial.
- Asignar **(1.5 ptos)** por determinar la cantidad de sal que debe contener cada tanque después de 20 minutos. (**(0.5 pto)** por cada tanque).

- **Observación.** En el caso que un alumno se equivoca en el segundo sistema pero aplica correctamente la metodología, se asigna al total **(3 ptos)**.