PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2020

INTERROGACIÓN 2 – PAUTA
MAT1640

Problema 1. Considere la EDO autónoma

$$\frac{du}{dt} = \frac{ue^u - 9u}{e^u}.$$

Encuentre los puntos críticos, dibuje sus diagramas de fase, y clasifíquelos. Indique además, para cada uno de ellos, si es inestable o asintóticamente estable.

Solución Problema 1. Los punto críticos son $u_1 = 0$ **[0,5 pts]** y $u_2 = \ln(9)$ **[0,5 pts]**. Claramente

	$(-\infty, 0)$	$(0, \ln(9))$	$(\ln(9), \infty)$
u	$-$	$+$	$+$
$e^u - 9$	$-$	$-$	$+$
u'	$+$	$-$	$+$

por lo que $u_1 = 0$ es un atractator **[1 pts]**, asíntoticamente estable **[1 pts]**, y $u_2 = \ln(9)$ es un repelente **[1 pts]**, inestable **[1 pts]**. Se asigna **[1 pts]** por cada diagrama de fase correspondiente (se puede dibujar un solo diagrama con ambos puntos críticos).

Problema 2. Resuelva dos, y sólo dos, de los siguientes problemas:

a) Encuentre la solución general de $u^{(6)} + u^{(5)} + u^{(4)} + u''' = 0$ en $\mathbb{R}$.

b) Encuentre la solución general de $x^4u'' + x^3u' - 4x^2u = 1$ en $(0, \infty)$.

c) Encuentre una familia 2-paramétrica de soluciones para $u^2u'' = u'$.

Solución Problema 2. (a) La ecuación auxiliar es

$0 = m^6+m^5+m^4+m^3 = m^3(m^3+m^2+m+1) = m^3(m+1)(m^2+1) = m^3(m+1)(m+i)(m-i)$ **[1,5 pts]**

por lo que la solución general es

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + c_5\cos(x) + c_6\sin(x). \text{ [1,5 pts]}$$

(b) La EDO es de Cauchy-Euler, por lo que intentamos $u = x^m$, de donde

$$0 = m(m-1) + m - 4 = m^2 - 4 \text{ [0,5 pts]}$$

por lo que la solución del problema homogéneo asociado es

$$u_c(x) = c_1x^2 + c_2x^{-2}. \text{ [0,5 pts]}$$

Buscamos solución particular con variación de parámetros. Tomamos $u_1 = x^2$, $u_2 = x^{-2}$, y calculamos

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -4x^{-1} \ , \ W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ x^{-4} & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -x^{-6} \ , \ W_2 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x^{-4} \end{vmatrix} = x^{-2}$$

([**0,5 pts**] por los tres cálculos en conjunto) por lo que

$$c_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{1}{4}x^{-5} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{16}x^{-4}$$
$$c_2' = \frac{W_2}{W} = -\frac{1}{4}x^{-1} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{4}\ln(x)$$

([**0,5 pts**] por ambos cálculos) y entonces una solución particular es

$$u_p(x) = -\frac{1}{16}x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-2}\ln(x) \text{ o simplemente } u_p(x) = -\frac{1}{4}x^{-2}\ln(x) \text{[0,5 pts]}$$

pues x^{-2} es solución del problema homogéneo (no descontar si no hace esta simplificación). Luego, la solución general es

$$u(x) = c_1x^2 + c_2x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-2}\ln(x). \text{[0,5 pts]}$$

(c) Con $w = u'$ y $u'' = \frac{dw}{du}u'$ obtenemos

$$\frac{dw}{du} = \frac{1}{u^2} \Rightarrow w = -\frac{1}{u} + c_1 \text{ [1 pts]}$$

y entonces

$$\int \frac{u}{uc_1 - 1} du = x + c_2 \text{ [1 pts]}$$

por lo que obtenemos las soluciones implícitas

$$\frac{1}{c_1} \left(u + \ln(c_1 u - 1) \right) = x + c_2. \text{ [1 pts]}$$

Problema 3.

a) Encuentre una EDO lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes tal que $u_1 = 1$ y $u_2 = e^{-x}$ son soluciones del problema homogéneo asociado, y $u_p = \frac{1}{2}x^2 - x$ es solución particular.

b) Se puede verificar (no lo haga) que $u_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es solución de $4x^2u'' + 8x^3u' + (4x^2 - 3)u = 0$. Encuentre la solución general de

$$4x^2u'' + 8x^3u' + (4x^2 - 3)u = 4x^{7/2}.$$

Solución Problema 3. (a) Dado lo pedido, la ecuación auxiliar deber ser

$$0 = m(m+1) = m^2 + m \text{ [0,5 pts]}$$

por lo que el operador diferencial debe ser $D^2 + D$. Como

$$(D^2 + D)u_p = 1 + x - 1 = x \text{ [0,5 pts]}$$

la EDO buscada es

$$u'' + u' = x. \text{ [0,5 pts]}$$

(b) Sabemos que una segunda solución del problema homogéneo, L.I. de u_1, es

$$u_2 = x^{-1/2} \int \frac{e^{-\int 2xdx}}{x^{-1}} dx = x^{-1/2} \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x^2}. \text{ [1 pts]}$$

Para encontrar una solución particular usamos variación de parámetros. Calculamos

$$W = \begin{vmatrix} x^{-1/2} & -\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x^2} \\ -\frac{1}{2}x^{-3/2} & \frac{1}{4}x^{-3/2}e^{-x^2} + x^{1/2}e^{-x^2} \end{vmatrix} = e^{-x^2}\left(\frac{1}{4}x^{-2} + 1 - \frac{1}{4}x^{-2}\right) = e^{-x^2} \text{ [0,5 pts]}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x^2} \\ x^{3/2} & \frac{1}{4}x^{-3/2}e^{-x^2} + x^{1/2}e^{-x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}xe^{-x^2} \text{ [0,5 pts]}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^{-1/2} & 0 \\ -\frac{1}{2}x^{-3/2} & x^{3/2} \end{vmatrix} = x \text{ [0,5 pts]}$$

de modo que

$$c_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{1}{2}x \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}x^2 \text{ [0,5 pts]}$$
$$c_2' = \frac{W_2}{W} = xe^{x^2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}e^{x^2} \text{ [0,5 pts]}$$

y una solución particular es

$$u_p(x) = \frac{1}{4}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^{-1/2} \text{ [0,5 pts]}.$$

Como $x^{-1/2}$ es solución del problema homogenéo, concluimos que la solución general es

$$u(x) = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^{-1/2} e^{-x^2} + \frac{1}{4} x^{3/2}. \textbf{ [0,5 pts]}$$

Problema 4. Considere el caso de un sistema masa-resorte de masa 1 kilogramo que se encuentra en equilibrio en un medio que genera una fuerza opuesta al movimiento la cual es igual a 10 veces la velocidad en magnitud. Suponga la constante del resorte k es un parámetro modificable, y se desea que en los tiempo $t = 0$ y $t = 1$ la masa se encuentre en su posición de equilibrio. Encuentre los valores de k de modo que esto sea posible de lograr con una masa en movimiento. Para cada uno de estos valores de k indique cuantas veces la masa en movimiento pasa por la posición de equilibrio en el intervalo de tiempo $(0, 1)$.

Solución Problema 4. El problema se modela con el problema de valores de frontera

$$x''(t) + 10x'(t) + kx(t) = 0 \ , \ x(0) = x(1) = 0 \ \textbf{[1 pts]}$$

y se nos pide encontrar soluciones no triviales en función del valor de k (el cual se puede asumir positivo). Las soluciones de la ecuación auxiliar son

$$m = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4k}}{2} = -5 \pm \sqrt{25 - k} \ \textbf{[0,5 pts]}$$

de modo que tenemos tres casos:

Caso 1: $25 - k > 0$. En tal caso las soluciones son

$$x(t) = c_1 e^{(-5+\sqrt{25-k})t} + c_2 e^{(-5-\sqrt{25-k})t} \ \textbf{[0,5 pts]}$$

y de las condiciones de borde

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e^{-5+\sqrt{25-k}} + c_2 e^{-5-\sqrt{25-k}t} &= 0. \end{aligned}$$

Se deduce fácilmente que $c_1 = c_2 = 0$ es la única solución, por lo que en este caso no es posible obtener lo pedido **[0,5 pts]**.

Caso 2: $25 - k = 0$. Ahora

$$x(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 t e^{-5t} \ \textbf{[0,5 pts]}$$

y de las condiciones de borde

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_1 e^{-5} + c_2 e^{-5} &= 0. \end{aligned}$$

Nuevamente se deduce que $c_1 = c_2 = 0$ es la única solución, y por lo tanto no es posible obtener lo pedido **[0,5 pts]**.

Caso 3: $25 - k < 0$. En este caso

$$x(t) = e^{-5t}\left(c_1 \cos(t\sqrt{k-25}) + c_2 \sin(t\sqrt{k-25})\right) \ \textbf{[0,5 pts]}$$

y de las condiciones de borde

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ e^{-5}\left(c_1\cos(\sqrt{k-25}) + c_2\sin(\sqrt{k-25})\right) &= 0. \end{aligned}$$

Luego $c_1 = 0$, pero la segunda ecuación se cumple para cualquier c_2 provisto $\sqrt{k-25}$ es un múltiplo de π. En consecuencia, se puede lograr lo pedido si k es alguno de los números

$$k_n = 25 + (n\pi)^2 \ , \ n \in \mathbb{N} \ \textbf{[1 pts]}$$

en cuyo caso el movimiento es descrito por

$$x_n(t) = c_2 e^{-5t}\sin(t\sqrt{k_n - 25}) = c_2 e^{-5t}\sin(n\pi t). \ \textbf{[0,5 pts]}$$

De lo anterior observamos que si $k = k_n$ entonces la masa (en movimiento) pasa por la posición de equilibrio $n-1$ veces en el intervalo de tiempo $(0,1)$ **[0,5 pts]**.

Tiempo: 2 horas.