PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE 2018

INTERROGACIÓN 2
ECUACIONES DIFERENCIALES ⋆ MAT1640

PAUTA DE SOLUCIONES

1. (a) (3 puntos) ¿Para cuál(es) valor(res) de a la solución del siguiente PVI converge hacia 0 cuándo $t \to +\infty$?

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución: La EDO es lineal homogénea con coeficientes constantes. La ecuación característica es $r^2 + r - 6 = 0$, que tiene raíces $r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$, es decir, $r = -3$ o $r = 2$. Así la solución general es $y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$. [1 pt]

Una tal función converge hacia 0 cuándo $t \to +\infty$ si y solo si $C_2 = 0$ [0.5 pt], es decir, $y = C_1 e^{-3t}$. La condición inicial $y(0) = a$ implica $C_1 = a$. Derivando: $y'(t) = -3ae^{-t}$. Substituyendo $t = 0$, obtenemos $1 = -3a$, es decir, la respuesta es $\boxed{a = -1/3}$. [1.5 pt]

[Adjuntar gráfico de la solución que tiende a 0: bonus de 0.5 pt (desde que no sobrepase el máximo de 3 pt).]

(b) (3 puntos) Encuentre la solución general de la EDO $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = t + e^{-4t}$.

Solución: La EDO es lineal no homogénea con coeficientes constantes. La EDO homogénea asociada ya se ha resuelto en el ítem (a). El método de los coeficientes indeterminados sugiere buscar una solución particular para la EDO no homogénea del tipo $y = At + B + Ce^{-4t}$. [1 pt] Haciendo las cuentas:

$$\begin{array}{rcl} y = At + B + Ce^{-4t} & \Rightarrow & -6y = -6At - 6B - 6Ce^{-4t} \\ y' = A - 4Ce^{-4t} & \Rightarrow & y' = A - 4Ce^{-4t} \\ y'' = 16Ce^{-4t} & \Rightarrow & y'' = 16Ce^{-4t} \\ & & y'' + 5y' + 6y = \underbrace{-6A}_{1}\, t + \underbrace{(A - 6B)}_{0} + \underbrace{6C}_{1}\, e^{-4t} \end{array}$$

Así $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{36}$, $C = \frac{1}{6}$. [1 pt]
Sumando, se concluye que la solución general de la EDO no-homogénea es:

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} - \frac{t}{6} - \frac{1}{36} + \frac{1}{6} e^{-4t}} \quad [1 \text{ pt}]$$

2. (6 puntos) Considere un sistema masa-resorte con los siguientes parámetros:

$$\text{masa} = 2\,\text{kg}$$
$$\text{constante de amortiguación} = 8\,\text{kg/s}$$
$$\text{constante del resorte} = 10\,\text{N/m}$$

Supongamos que en el instante $t = 0\,\text{s}$, la masa está en la posición de equilibrio y tiene velocidad 0,1m/s. Encuentre la posición de la masa en un instante cualquiera t.

Solución: Sea $y(t)$ es desplazamiento (en metros) de la masa con respecto a la posición de equilibrio, como función del tiempo t (en segundos). La EDO correspondiente es $my'' + cy' + ky = 0$, con $m = 2$, $c = 8$, $k = 10$, o sea, $y'' + 4y' + 5y = 0$. [1.5 pt]

La ecuación característica es $r^2+4r+5 = 0$, y sus raíces son $r = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times4}}{2} = -2\pm i$. La solución general de la EDO es $y(t) = C_1e^{-2t}\cos t + C_2e^{-2t}\,\text{sen}\,t$. [1.5 pt]

Las condiciones iniciales del PVI son: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0{,}1$. [0.5 pt] La primera conduce directamente a $C_1 = 0$ [1 pt], es decir $y(t) = C_2e^{-2t}\,\text{sen}\,t$. Derivando:

$$y'(t) = -2C_2e^{-2t}\,\text{sen}\,t + C_2e^{-2t}\cos t\,.$$

Remplazando $t = 0$, obtenemos $0{,}1 = C_2$. [1.5 pt]

Respuesta: $\boxed{y(t) = 0{,}1e^{-2t}\,\text{sen}\,t}$ (donde t se mide en segundos y y se mide en metros). [Hay que escribir la fórmula; de lo contrario incurre penalidad de 0.5 pt.]

3. (6 puntos) Encuentre la solución general de

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t} \qquad \text{(suponiendo } t > 0\text{)}.$$

Solución: Esta EDO es de 2º orden, lineal con coeficientes constantes, no homogénea. La función $\frac{e^t}{t}$ no se ajusta al método de los coeficientes indeterminados; hay que usar el método de variación de parámetros.

Para empezar, necesitamos resolver la ecuación homogénea $y'' - 2y' + y = 0$. La ecuación característica es $r^2 - 2r + 1 = 0$, que tiene raíz doble $r = 1$. Por lo tanto, un conjunto LI de soluciones es $y_1 = e^t$, $y_2 = te^t$. [2 pt] El wronskiano asociado es

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^t \\ te^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}\,. \quad [1\text{ pt}]$$

Ahora aplicamos las fórmulas de variación de parámetros. Sea $f(t) = \frac{e^t}{t}$ (el coeficiente de y'' en la EDO ya es 1). La solución general es $y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ donde

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{W}\,dt = -\int te^t \cdot \frac{e^t}{t} \cdot \frac{1}{e^{2t}}\,dt = -\int dt = -t + c_1$$
$$u_2 = \int \frac{y_1 f}{W}\,dt = \int e^t \cdot \frac{e^t}{t} \cdot \frac{1}{e^{2t}}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c_2 \qquad (t > 0)$$

Por lo tanto llegamos a la respuesta: $\boxed{y = (-t + c_1)e^t + (\ln t + c_2)te^t}$. [Puntaje por esta parte: 1 pt por plantear bien el método de variación de parámetros, más 2 pt por hacer bien los cálculos. Importante: La fórmula de la solución general debe contener las dos contantes libres; de lo contrario incurre penalidad de 1 pt.]

Obs: Una manera un poco más limpia de escribir la solución es: $y = te^t \ln t + c_1 e^t + c_2 te^t$ (cambiando c_2).

4. *Conteste cada una de las preguntas siguientes con "SÍ" o "NO". Indique claramente su respuesta y incluya la justificativa apropiada.*

   (a) (2 puntos) ¿Hay alguna ecuación diferencial del tipo

   $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)\,,$$

   con p, q y f funciones continuas en $\mathbb{R}$ y que tenga como soluciones particulares las funciones

   $$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = \cos x \quad ?$$

   En caso positivo, exhiba una tal ecuación. En caso negativo, justifique.

Solución: La respuesta es **NO**. Las dos funciones propuestas serían dos soluciones distintas del mismo PVI

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esto sería una contradicción con el Teorema de Existencia y Unicidad.

Otra solución: El wronskiano asociado al par de soluciones es:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x\,.$$

Esta es una función que tiene ceros pero no es idénticamente cero, lo que no es posible para un par de soluciones de una EDO lineal homogénea de segundo orden. Así la respuesta es **NO**.

[Puntaje: Se asigna puntaje 2 solamente a la respuesta "NO" acompañada de justificativa válida.]

(b) (2 puntos) ¿Existe algún valor de ω para el cual la ecuación

$$y'' + 7y = \operatorname{sen}(\omega x)$$

posee al menos una solución *no acotada*? En caso positivo, exhiba una tal solución. En caso negativo, justifique.

Obs: Recuerde que una función y con dominio $\mathbb{R}$ es *acotada* si existe $M > 0$ tal que $|y(x)| \leqslant M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

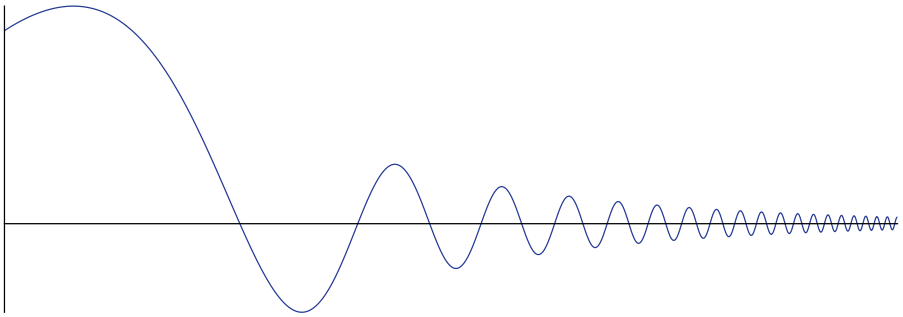
Solución: La respuesta es **SÍ**. De hecho, esto es el fenómeno de resonancia. Explícitamente, si $\omega = \sqrt{7}$ entonces $y = -\frac{t}{2\sqrt{7}} \cos(\sqrt{7}x)$ es solución no acotada.

[Puntaje: Se asigna puntaje 2 a la respuesta "SÍ" acompañada del valor $\omega = \sqrt{7}$ y una solución no acotada. Se acepta un gráfico de la solución en vez de su fórmula, especialmente si se menciona el término *resonancia*.]

(c) (2 puntos) Un sistema masa-resorte con amortiguación cumple la EDO

$$my'' + cy' + ky = 0\,,$$

con m, c e k constantes positivas. Suponga que $c < 2\sqrt{mk}$. ¿Es cierto que el siguiente gráfico representa una solución particular $y = y(t)$?



Justifique su respuesta.

Solución: Las soluciones tienen una fórmula del tipo $y(t) = Ce^{-\rho t}\cos(\omega t - \alpha)$. En particular, los pasajes consecutivos por el equilibrio $y = 0$ son igualmente espaciadas en t, lo que no se cumple en el gráfico dado. Por lo tanto la respuesta es **NO**.

[Puntaje: Se asigna puntaje 2 solamente a la respuesta "NO" acompañada de justificativa válida.]