Interrogación 2

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales

1. El *modelo de Schaefer* busca representar la evolución de una población de peces como producto de su crecimiento logístico y su extracción a causa de la pesca. El modelo es el siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey, \quad y \geq 0,$$

donde todas las constantes E, r, K son números positivos. La **tasa de extracción** de peces está dada por el término Ey.

a) Determine los valores de E para los cuales existen 2 puntos críticos.

b) Para los valores de E encontrados en la parte anterior, haga un diagrama de fase, clasifique los puntos críticos y grafique las soluciones de equilibrio y otras curvas solución alrededor de estas.

c) Para una condición inicial $y(0) > 0$, calcule $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Luego, encuentre el valor de la constante E que maximiza la tasa de extracción asintótica, es decir, la tasa de extracción límite cuando $t \to \infty$.

Solución.

a) Definiendo la función $f(y) = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey$, los puntos críticos son aquellos valores $y \geq 0$ tales que $f(y) = 0$. Luego, como

$$f(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\left(r - E - \frac{r}{K}y\right) = 0$$

la función $f(y)$ se anula para $y = 0$ y para $y = K(1 - \frac{E}{r})$. Concluimos que hay 2 puntos críticos en la región $y \geq 0$ si $E < r$.

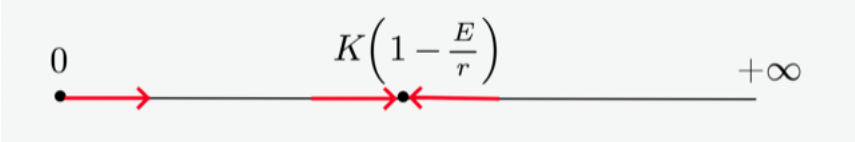
Evaluación.

- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente que $y = 0$ es un punto crítico.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente que $y = k(1 - E/r)$ es un punto crítico.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar la condición $E < r$ o $0 < E < r$. Este puntaje se asignará únicamente si se determinó a $y = k(1 - E/r)$ entre los puntos críticos. Si el estudiante encuentra otra condición para E porque equivocó en determinar el punto crítico no cero, pero esta condición es consistente con su punto crítico encontrado y la restricción $y \geq 0$, asignar ((**0.5 ptos**)).

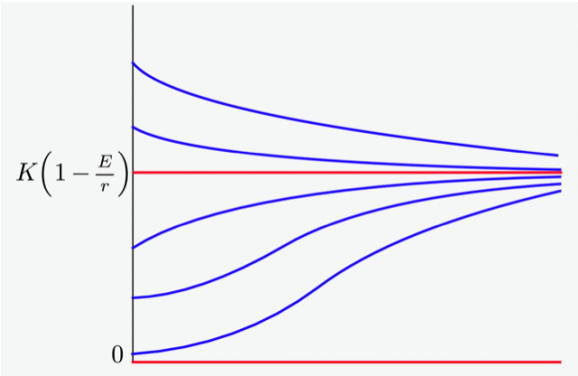
b) Para obtener el diagrama de fase analizamos los signos de $f(y)$ entorno a los puntos críticos. Tenemos que (recordando que $r > 0$)

	$(0, K(1-\frac{E}{r}))$	$(K(1-\frac{E}{r}), \infty)$
y	$+$	$+$
$(r-E)-\frac{r}{K}y$	$+$	$-$
$f(y)$	$+$	$-$

El diagrama de fase es entonces:



Concluimos que $y = 0$ es un punto crítico inestable (fuente), mientras que $y = K(1-\frac{E}{r})$ es asintóticamente estable (sumidero). El gráfico de las soluciones de equilibrio y otras alrededor de estas es de la forma:



Evaluación. El siguiente puntaje se asignará si el estudiante determino correctamente los puntos de equilibrio.

- Asignar (**0.25 ptos**) por determinar correctamente el signo de $f(y)$ entre 0 y $K(1-E/r)$.
- Asignar (**0.25 ptos**) por determinar correctamente el signo de $f(y)$ entre $K(1-E/r)$ e ∞.
- Asignar (**0.75 ptos**) por esbozar el diagrama de fase correctamente para $y \geq 0$. Este diagrama puede ser como el presentado en la pauta o uno con segmentos que emulan pendientes.
- Asignar (**0.25 ptos**) por clasificar correctamente a $y = 0$ como un punto inestable o fuente.
- Asignar (**0.25 ptos**) por clasificar correctamente a $y = K(1-E/r)$ como un punto estable o sumidero.
- Asignar (**0.75 ptos**) por esbozar el gráfico de soluciones de equilibrio y otros alrededor de éstas correctamente para $y \geq 0$.

Evaluación. El siguiente puntaje se asignará si el estudiante equivocó en determinar el punto crítico diferente de cero, pero para la condición dada para E el punto crítico es positivo.

- Asignar (**0.2 ptos**) por determinar correctamente el signo de $f(y)$ entre 0 y el otro punto crítico.
- Asignar (**0.2 ptos**) por determinar correctamente el signo de $f(y)$ entre el punto crítico no cero e ∞.
- Asignar (**0.5 ptos**) por esbozar el diagrama de fase correctamente para $y \geq 0$. Este diagrama puede ser como el presentado en la pauta o uno con segmentos que emulan pendientes.
- Asignar (**0.2 ptos**) por clasificar correctamente a $y = 0$ como un punto inestable o fuente.
- Asignar (**0.2 ptos**) por clasificar correctamente a $y = K(1-E/r)$ como un punto estable o sumidero.
- Asignar (**0.5 ptos**) por esbozar el gráfico de soluciones de equilibrio y otros alrededor de éstas correctamente para $y \geq 0$.

c) Para una condición inicial $y(0) > 0$, de acuerdo al diagrama de fase, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K(1 - \frac{E}{r}).$$

Como de acuerdo con el enunciado del problema la tasa de extración de peces está dada por el producto Ey, en el límite $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} Ey(t) = K(1 - \frac{E}{r})E.$$

Si consideramos la función $g(E) = K(1 - \frac{E}{r})E$, para maximizar su valor, debemos encontrar el valor de E tal que

$$g'(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad K(1 - \frac{E}{r}) - \frac{K}{r}E = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{r}{2}.$$

Evaluación. Este puntaje se asignará tanto si el estudiante determinó correctamente los puntos críticos o a lo más se equivocó en determinar el punto crítico no cero, pero que la condición sobre E es coherente con $y \geq 0$.

- Asignar (**1 ptos**) por obtener la función a optimizar $g(E)$.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar el punto crítico de g.

2. Considere la ecuación diferencial lineal

$$\operatorname{sen}^2(x)y'' - 3\operatorname{sen}(x)\cos(x)y' + (1 + 2\cos^2(x))y = 0, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

para la cual $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una solución.

a) Encuentre una segunda solución y_2, linealmente independiente de y_1. Verique esto último calculando el Wronskiano.

Nota: tenga presente la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\Big)$

b) Considere el problema de valor inicial en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$. Encuentre dos soluciones al PVI y diga por qué no se contradice el teorema de existencia y unicidad.

Solución.

a) *Método 1:* Utilizando el método de reducción de orden, buscamos una segunda solución de la forma $y_2(x) = v(x)y_1(x) = v(x)\operatorname{sen}(x)$. Esto quiere decir que y_2 debe satisfacer

$$\operatorname{sen}^2(x)y_2'' - 3\operatorname{sen}(x)\cos(x)y_2' + (1 + 2\cos^2(x))y_2 = 0$$

Como

$$y_2' = v'\operatorname{sen}(x) + v\cos(x); \quad y_2'' = v''\operatorname{sen}(x) + 2v'\cos(x) - v\operatorname{sen}(x),$$

entonces

$$\operatorname{sen}^2(x)(v''\operatorname{sen}(x)+2v'\cos(x)-v\operatorname{sen}(x))-3\operatorname{sen}(x)\cos(x)(v'\operatorname{sen}(x)+v\cos(x))+(1+2\cos^2(x))v\operatorname{sen}(x)$$

lo cual se simplifica:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^3(x)v'' &+ (2\operatorname{sen}^2(x)\cos(x) - 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)) \\ &+ \underbrace{(-\operatorname{sen}^3(x) - 3\operatorname{sen}(x)\cos^2(x) + \operatorname{sen}(x) + 2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x))}_{\underbrace{-\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)}_{\underbrace{\operatorname{sen}(x)\cos^2(x) - \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)}_{0}}} v = 0;\end{aligned}$$

y finalmente obtenemos la ecuación de segundo orden reducible

$$v'' - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}v' = 0.$$

Tomando $u = v'$ y resolviendo la ecuación para u mediante factor integrante, se tiene que

$$u = Ce^{\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}dx} = Ce^{\log(\operatorname{sen}(x))} = C\operatorname{sen}(x), \quad x \in (0, \pi)$$

Entonces,

$$v = \int u(x)dx = C\int \operatorname{sen}(x)dx = -C\cos(x),$$

y por lo tanto $y_2(x) = -C\cos(x)\operatorname{sen}(x) = -\frac{C}{2}\operatorname{sen}(2x)$. Como la constante es arbitraria, podemos simplemente tomar $C = -2$ y obtener

$$y_2(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

sin embargo cualquier función de la forma $C\,\mathrm{sen}(2x)$ con $C \neq 0$ también es válida como solución.

Método 2. Usando la fórmula de Abel (para el wronskiano de soluciones), si y_1, y_2 son dos soluciones a la ecuación homogénea

$$y'' - 3\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}y' + \frac{(1+2\cos^2(x))}{\mathrm{sen}^3(x)}y = 0, \quad \text{en} \quad (0,\pi).$$

por lo que deben satisfacer la igualdad

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = W(y_1,y_2) = Ce^{-\int(-3\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)})dx}.$$

Usando que $y_1(x) = \mathrm{sen}(x)$, la igualdad se transforma en una ecuación de primer orden para y_2:

$$\mathrm{sen}(x)y_2' - \cos(x)y_2 = C\,\mathrm{sen}^3(x)$$

Resolvemos la ecuación

$$y_2' - \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}y_2 = C\,\mathrm{sen}^2(x)$$

usando el factor integrante $e^{-\int\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}dx} = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}$ y obtenemos que

$$y_2\frac{1}{\mathrm{sen}(x)} = C\int \mathrm{sen}^2\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}dx = C\cos(x)$$

Por lo tanto, tomando por ejemplo $C = 2$, se llega a que

$$y_2(x) = 2\cos(x)\,\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(2x).$$

Evaluación. Si se procede por el Método 1.

- Asignar (**1 ptos**) por remplazar correctamente $y_2(x) = v(x)\sin(x)$ en la ecuación diferencial y obtener una edo de segundo orden para v reducible.
- Asignar (**0.5 ptos**) por hacer el cambio de variable $u = v'$.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar la solución a la edo para u.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar v integrando $v' = u$.

Evaluación. Si se procede por el Método 2.

- Asignar (**0.5 ptos**) por calcular correctamente $\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$.
- Asignar (**1 ptos**) por obtener la ecuación diferencial $\mathrm{sen}(x)y_2' - \cos(x)y_2 = C\,\mathrm{sen}^3(x)$, donde C puede aparecer como constante genérica o con un valor asignado.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar un factor integrante para resolver la ecuación para y_2'.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar una solución y_2. Este puntaje se asignará únicamente si hay un desarrollo que justifica su elección y no por inspección.

b) Buscamos ahora resolver el PVI

$$y'' - 3\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}y' + \frac{(1+2\cos^2(x))}{\operatorname{sen}^3(x)}y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Es claro que una solución está dada por la función constante $y(x) = 0$. Sin embargo, por el principio de superposición, podemos encontrar otra solución a la ecuación anterior de la forma

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \operatorname{sen}(2x).$$

Imponiendo las condiciones iniciales, escogemos C_1, C_2 tales que

$$y(0) = C_1 \operatorname{sen}(0) + C_2 \operatorname{sen}(0) = 0,$$

lo cual se satisface para todo par de constante C_1, C_2, y por otro lado, pedimos que

$$y'(0) = C_1 \cos(0) + 2C_2 \cos(0) = 0,$$

es decir $C_1 + 2C_2 = 0$. Concluimos que para cualquier constante $C \in \mathbb{R}$, la función

$$y(x) = C \operatorname{sen}(x) - \frac{C}{2} \operatorname{sen}(2x),$$

es solución al PVI.

Lo anterior no contradice el teorema de existencia y unicidad ya que la existencia de multiples soluciones al PVI se explica por lo discontinuidad de los coeficientes de la ecuación en $x = 0$.

Evaluación. Si el estudiante determinó correctamente y_2.

- Asignar (**0.5 ptos**) por escribir la solución general de la edo.
- Asignar (**0.5 ptos**) por obtener una ecuación para C_1 y C_2 como causa de evaluar la solución general en $t = 0$.
- Asignar (**0.5 ptos**) por obtener una ecuación para C_1 y C_2 como causa de evaluar la derivada de la solución general en $t = 0$.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar que la solución al PVI depende de una constante.
- Asignar (**1 ptos**) por explicar por qué no se contradice el teorema de existencia y unicidad.

Evaluación. Si el estudiante encontró una y_2 que no resuelve la edo.

- Asignar (**0.25 ptos**) por escribir la solución general de la edo.
- Asignar (**0.25 ptos**) por obtener una ecuación para C_1 y C_2 como causa de evaluar la solución general en $t = 0$.
- Asignar (**0.25 ptos**) por obtener una ecuación para C_1 y C_2 como causa de evaluar la derivada de la solución general en $t = 0$.

3. Dada la ecuación diferencial

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = e^t \sec(t)$$

a) Determine la solución general a la ecuación homogénea.

b) Use el método de variación de parámetros para determinar una solución particular a esta ecuación.

c) Escriba la solución general de esta ecuación.

Solución.

a) La ecuación homogénea asociada es $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 0$ con ecuación característica $r^2 - 2r + 2 = 0$, cuyas raíces son $r = 1 \pm i$. Por lo anterior, la solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$x_h(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t)$$

Evaluación.

- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente la ecuación característica.
- Asignar (**0.25 ptos**) por cada raíz correctamente calculada de la ecuación característica. Total (**0.5 ptos**). **Este puntaje se asignará únicamente si se determinó correctamente la ecuación característica.**
- Asignar (**1 pto**) por cada una de las soluciones homogéneas linealmente independiente ($x_1(t) = e^t \cos(t)$ y $x_1(t) = e^t \sin(t)$). Total (**2 ptos**).
- Si el estudiante determinó mal la ecuación característica pero calcula correctamente las raíces de su ecuación (aunque no sean las correctas del ejercicio) y determina correctamente (de acuerdo a las raíces obtenidas) las dos soluciones homogéneas linealmente independientes, asignar un total de (**1 ptos**) a la parte *a*).

b) Si $x_1(t) = e^t \cos(t)$ y $x_2(t) = e^t \sin(t)$ son las soluciones homogéneas l.i. asociadas a esta ecuación, el método de variación de parámetros nos dice que una solución particular está dada por $x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$ donde

$$u_1(t) = -\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}\,dt = -\int \tan(t)\,dt = \ln(\cos(t)) + \underbrace{k_1}_{0}$$

$$u_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}\,dt = \int 1\,dt = t + \underbrace{k_2}_{0}$$

siendo $f(t) = e^t \sec(t)$ y $W(t) = e^{2t}$ el Wronskiano de x_1 y x_2. De este modo, una solución particular es

$$x_p(t) = \ln(\cos(t))e^t \cos(t) + t\, e^t \sin(t)$$

Evaluación. El siguiente puntaje se asignará únicamente si se calcularon correctamente las soluciones homogéneas en la parte *a*).

- Asignar (**0.5 ptos**) por calcular correctamente el Wronskiano: $W = e^{2t}$ o $W = -e^{2t}$.
- Asignar (**0.5 ptos**) por calcular correctamente $\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}$. Este puntaje se asignará únicamente si calculó correctamente el Wronskiano. Si el estudiante calculó mal el Wronskiano pero calcula correctamente $\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}$ para el Wronskiano obtenido, asignar (**0.25 ptos**)
- Asignar (**0.5 ptos**) por calcular correctamente $\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$. Este puntaje se asignará únicamente si calculó correctamente el Wronskiano. Si el estudiante calculó mal el Wronskiano pero calcula correctamente $\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$ para el Wronskiano obtenido, asignar (**0.25 ptos**)
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente la solución particular de la edo. Este puntaje se asignará únicamente si su respuesta es consecuencia de haber calculado correctamente el Wronskiano y las integrales $\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}$ y $\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$. Si el estudiante equivocó en el cálculo de a lo más el Wronskiano y determina una expresión (libre de integrales) para la solución particular, asignar (**0.25 ptos**)

Evaluación. El siguiente puntaje se asignará a aquellos estudiantes que se equivocaron al calcular alguna (una o ambas) de las soluciones homogéneas de la parte *a*).

- Asignar (**0.25 ptos**) por calcular correctamente el Wronskiano.
- Asignar (**0.25 ptos**) por calcular correctamente $\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}$. Este puntaje se asignará únicamente si calculó correctamente el Wronskiano y logra calcular la integral.
- Asignar (**0.25 ptos**) por calcular correctamente $\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$. Este puntaje se asignará únicamente si calculó correctamente el Wronskiano y logra calcular la integral.
- Asignar (**0.25 ptos**) por determinar correctamente la solución particular de la edo. Este puntaje se asignará únicamente si su respuesta es consecuencia de haber calculado correctamente el Wronskiano y las integrales $\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}$ y $\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$.

c) Finalmente, la solución general de la ecuación está dada por

$$x(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t) + \ln(\cos(t)) e^t \cos(t) + t\, e^t \sin(t)$$

Evaluación. El siguiente puntaje se asignará únicamente si se calcularon correctamente las soluciones homogéneas y particular en las partes *a*) y *b*).

- Asignar (**1 ptos**) por escribir la solución general de la ecuación diferencial.

Evaluación. El siguiente puntaje se asignará únicamente a aquellos estudiantes que en la parte *a*) obtienen la solución homogénea habiendo cometido como único error la ecuación característica y/o en la parte *b*) como único error el cálculo del Wronskiano.

- Asignar (**0.5 ptos**) por escribir la solución general de la ecuación diferencial.

4. Resuelva la ecuación diferencial

$$x'''(t) - x'(t) = -1 + 2\sin(t)$$

a) Determine la solución general a la ecuación homogénea.

b) Use el método de coeficientes indeterminados para determinar una solución particular a esta ecuación.

Sugerencia. Se recomienda encontrar una solución particular para -1 y otra para $2\sin(t)$ y luego superposición de soluciones.

c) Escriba la solución general de esta ecuación.

Solución.

a) La ecuación homogénea asociada es $x'''(t) - x'(t) = 0$ con ecuación característica $r^3 - r = 0$, cuyas raíces son $r = 0$, $r = -1$ y $r = 1$. Por lo anterior, la solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{t}$$

Evaluación.

- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente la ecuación característica.
- Asignar (**0.25 ptos**) por cada raíz correctamente calculada de la ecuación característica. Total (**0.75 ptos**). **Este puntaje se asignará únicamente si se determinó correctamente la ecuación característica.**
- Asignar (**0.5 pto**) por cada una de las soluciones homogéneas linealmente independiente ($x_1(t) = 1$, $x_2(t) = e^t$ y $x_3(t) = e^{-t}$). Total (**1.5 ptos**).
- Si el estudiante determinó mal la ecuación característica pero calcula correctamente las raíces de su ecuación (aunque no sean las correctas del ejercicio) y determina correctamente (de acuerdo a las raíces obtenidas) las tres soluciones homogéneas linealmente independientes, asignar un total de (**1 ptos**) a la parte *a*).

b) Una solución particular a esta ecuación es de la forma $x_p(t) = u(t)+v(t)$ donde $u'''-u' = -1$ y $v''' - v' = 2\sin(t)$. Como -1 es parte de la solución homogénea, entonces un candidato es $u(t) = at$, que luego de remplazar en la ecuación queda que $-a = -1$ y por tanto $a = 1$. Por otro lado, $\sin(t)$ no es parte de la solución homogénea, entonces un candidato es $v(t) = b\cos(t) + c\sin(t)$, que luego de remplazar en la ecuación queda

$$2b\sin(t) - 2c\cos(t) = 2\sin(t)$$

de donde se deduce que $b = 1$ y $c = 0$. Por lo anterior, una solución particular es

$$x_p(t) = t + \cos(t)$$

Evaluación. El siguiente puntaje se asignará únicamente si se calcularon correctamente las soluciones homogéneas en la parte *a*).

- Asignar (**1.25 ptos**) por determinar a t o t + homogénea como parte de la solución particular.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar a $\cos(t)$ o $\cos(t)$ + homogénea como parte de la solución particular.

c) La solución general de esta ecuación está dada por

$$x(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + t + \cos(t)$$

Evaluación. El siguiente puntaje se asignará únicamente si se calcularon correctamente las soluciones homogéneas y particular en las partes *a*) y *b*).

- Asignar (**1 ptos**) por escribir la solución general de la ecuación diferencial.

Evaluación. El siguiente puntaje se asignará únicamente a aquellos estudiantes que en la parte *a*) obtienen la solución homogénea habiendo cometido como único error la ecuación característica.

- Asignar (**0.5 ptos**) por escribir la solución general de la ecuación diferencial.

Duración: 120 min

No se permite el uso de calculadora