PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEGUNDO SEMESTRE 2014

PAUTA I1
MAT1640 ⋆ ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2y$.

   b) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$.

   c) $2y' + \dfrac{1}{x}y = x^2y^{-1}$.

   Solución:

   a) Primero notemos que la ecuación es de variable separable. Por otro lado la ecuación admite la solución $y(x) \equiv 0$. Si y es otra solución, entonces

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{dy}{dx} = 2y \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{2}{1-x^2}dx \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2}{1-x^2}dx \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}dx \\
&\Rightarrow \quad \ln(|y|) = -\ln(|1-x|) + \ln(|1+x|) + C \\
&\Rightarrow \quad \ln(|y|) = \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C \\
&\Rightarrow \quad |y(x)| = e^C \left|\frac{1+x}{1-x}\right|.
\end{aligned}$$

   b) Al dividir por x tenemos que la ecuación es equivalente a

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

que es homogénea. Luego si $ux = y$ se tiene que $y' = u'x + u$. Luego reemplazando tenemos

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow u'x + u = u + \sqrt{1+u^2} \Rightarrow u'x = \sqrt{1+u^2}$$

Esta ultima ecuación es de variable separable y, por lo tanto

$$\begin{aligned} u'x = \sqrt{1+u^2} &\Rightarrow u'x = \sqrt{1+u^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}u' = \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}u'dx = \int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + C. \end{aligned}$$

Haciendo $u = \tan(\theta)$ tenemos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}d\theta = \ln(|\sec(\theta) + \tan(\theta)|) = \ln(|\sqrt{1+u^2} + u|)$$

Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + C &\Rightarrow \ln(|\sqrt{1+u^2} + u|) = \ln(|x|) + C \\ &\Rightarrow \left|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\right| = e^{\ln(|x|)+C} \\ &\Rightarrow \left|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\right| = e^C|x| \end{aligned}$$

c) La ecuación es de Bernoulli con $n = -1$ y esta se puede escribir como

$$2yy' + \frac{1}{x}y^2 = x^2.$$

Haciendo el cambio de variable $u = y^2$ tenemos que $u' = 2yy'$. Reemplazando tenemos

$$u' + \frac{1}{x}u = x^2.$$

que es lineal de primer orden. Luego

$$\begin{aligned}
u' + \frac{1}{x}u = x^2 &\Rightarrow (u' + \frac{1}{x}u)e^{\int \frac{1}{x}dx} = x^2 e^{\int \frac{1}{x}dx} \\
&\Rightarrow u'x + u = x^3 \\
&\Rightarrow (ux)' = x^3 \\
&\Rightarrow ux = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \\
&\Rightarrow u = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x} \\
&\Rightarrow y^2(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$

2. *a*) La ecuación $\left(xy+1+\dfrac{2x}{e^{xy}}\right)dx+x^2dy=0$ es exacta cuando se multiplica por un factor integrante de la forma $e^{\alpha xy}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine α y resuelva la ecuación ocupando el factor integrante.

   b) Resuelva $xyy'+y^2=\text{sen}(x)$, con $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ haciendo $y^2=u$.

Solución:

a) Sabemos que $\left(xy+1+\dfrac{2x}{e^{xy}}\right)e^{\alpha xy}dx+x^2e^{\alpha xy}dy=0$ es exacta para algun α. Luego se debe tener que

$$\left(\left(xy+1+\frac{2x}{e^{xy}}\right)e^{\alpha xy}\right)_y=\left(x^2e^{\alpha xy}\right)_x \Leftrightarrow (\alpha-1)x(2xe^{(\alpha-1)xy}+e^{\alpha xy})=0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

De lo anterior sabemos que $(xye^{xy}+e^{xy}+2x)\,dx+x^2e^{xy}dy=0$ es exacta. Luego sabemos que existe una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=C$ define las soluciones de la ecuación donde f cumple que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int xye^{xy}+e^{xy}+2xdx+C_1(y). \\ f(x,y) &= \int x^2e^{xy}dy+C_2(x). \end{aligned}$$

Integrando e igualando para encontrar $C_1(y)$ y $C_2(x)$ tenemos que las soluciones estan dadas por la relación

$$xe^{xy}+x^2=C$$

b) Si $u=y^2$, entonces $u'=2yy'$. Reemplazando obtenemos la ecuación lineal de primer orden

$$u'+\frac{2}{x}u=2\frac{\text{sen}(x)}{x}$$

El factor integrante esta dado por $e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$. De esto tenemos

$$\begin{aligned} u' + \frac{2}{x}u = 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} &\Rightarrow x^2u' + 2xu = 2x\operatorname{sen}(x) \\ &\Rightarrow (x^2u)' = 2x\operatorname{sen}(x) \\ &\Rightarrow x^2u = \int 2x\operatorname{sen}(x)dx + C \\ &\Rightarrow x^2u = 2\operatorname{sen}(x) - 2x\cos(x) + C \\ &\Rightarrow u = \frac{2\operatorname{sen}(x) - 2x\cos(x) + C}{x^2} \\ &\Rightarrow y^2(x) = \frac{2\operatorname{sen}(x) - 2x\cos(x) + C}{x^2} \end{aligned}$$

Como $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, entonces $C = \frac{\pi^2}{4} - 2$. Finalmente la solución esta definida por la relación

$$y^2(x) = \frac{2\operatorname{sen}(x) - 2x\cos(x) + \frac{\pi^2}{4} - 2}{x^2}.$$

3. Considere el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y-x} + 1, \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Encuentre explícitamente al menos dos soluciones distintas de (1), definidas en todo $\mathbb{R}$. ¿Contradice esto el teorema de existencia y unicidad? Justifique su respuesta.

Solución:

Sea $u = y - x$. Con esto tenemos que la ecuación (1) es equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \sqrt{u}, \\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ahora es claro que una posible solución es $u \equiv 0$ que equivale a la solución $y_1(x) = x$ del problema original.

Resolviendo la ecuación (2) por variables separables se llega a que $u = \dfrac{(x+C)^2}{4}$. Como $u(1) = 0$, entonces $C = -1$ y tenemos que una "solución" de (1) es

$$y_2 = x + \frac{(x-1)^2}{4}$$

Notemos que $y_2' = 1 + \dfrac{x-1}{2}$ y $\sqrt{y-x} + 1 = 1 + \dfrac{|x-1|}{2}$. Luego $y_2(x)$ es solución de (1) solo si $x \geq 1$. Por lo tanto $y_2(x)$ no cumple las condiciones del problema (que este definida en todo $\mathbb{R}$). Una posible opción es considerar la función

$$y_2(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 1, \\ x + \frac{(x+C)^2}{4} & \text{si} \quad x > 1, \end{cases}$$

Es claro que para todo $C \in \mathbb{R}$, y_2 es solución. Luego bastaria encontrar un C de tal manera que $y_2(x)$ sea continua.

$$\lim_{x \to 1^+} y_2(x) = \lim_{x \to 1^-} y_2(x) = 1 = y_2(1) \Leftrightarrow C = -1$$

Por lo que

$$y_2(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 1, \\ x + \frac{(x-1)^2}{4} & \text{si} \quad x > 1, \end{cases}$$

es otra solución continua y definida en todo $\mathbb{R}$, distinta a y_1, de (1).

Lo anterior no contradice el Teorema de existencia y unicidad, pues la función $f(x, y) = \sqrt{y - x} + 1$ no cumple que f_y sea continua en $(1, 1)$ y, por esta razón, no se tiene la unicidad.

4. La venta esperada de un nuevo libro se describe por el modelo siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = c\,(P_0 - p(t))\,t, \\ p(0) = 0. \end{cases}$$

Aquí, $p(t)$ es la cantitad de personas quienes han comprado el libro hasta el momento $t \geq 0$, P_0 es la población total y $c > 0$ es una constante de proporcionalidad. Se sabe que despues de la primera hora una decima parte de la población ha comprado el libro.

a) Dé la forma general de la solución $p(t)$ en cualquier $t > 0$.

b) Encuentre el tiempo t_0 para el cual la mitad de la población haya comprado el libro.

Solución:

a) La ecuación $\dfrac{dp}{dt} = c\,(P_0 - p(t))\,t$ es de variable separables.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = c\,(P_0 - p(t))\,t \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{(P_0 - p(t))}\frac{dp}{dt} = ct \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{(P_0 - p(t))}\frac{dp}{dt}dt = \int ctdt \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{(P_0 - p)}dp = \frac{c}{2}t^2 + d \\ &\Rightarrow \quad -\ln(P_0 - p(t)) = \frac{c}{2}t^2 + d \\ &\Rightarrow \quad P_0 - p(t) = De^{\frac{c}{2}t^2} \\ &\Rightarrow \quad p(t) = P_0 - De^{\frac{c}{2}t^2} \end{aligned}$$

Como $p(0) = 0$, entonces $D = P_0$ y, por lo tanto, $p(t) = P_0(1 - e^{\frac{c}{2}t^2})$. Por otro lado se tiene que $p(1) = P_0/10$, entonces

$$P_0/10 = P_0(1 - e^{\frac{c}{2}}) \Rightarrow \frac{c}{2} = \ln(9/10)$$

Por lo que

$$p(t) = P_0\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{t^2}\right)$$

b) Buscamos t_0 tal que $p(t_0) = P_0/2$. Pero

$$p(t_0) = P_0/2 \Leftrightarrow P_0\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{t_0^2}\right) = P_0/2 \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{\ln(1/2)}{\ln(9/10)}}$$