Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2025

Interrogación 2 MAT1640
14 de Enero de 2025

Dispone de 2 horas para contestar las preguntas de esta prueba.

1. *a*) Encuentre una solución particular de

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

b) La solución general de un cierto sistema $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ es

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Encuentre una solución particular de

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Una solución:

a) Utilizando la técnica de coeficientes indeterminados, intentamos una solución particular

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Puesto que

$$\frac{d\vec{x}_p}{dt} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}_p = \vec{0} - \begin{bmatrix} 5c_3 \\ 5c_2 \\ 5c_1 \end{bmatrix}$$

obtenemos las condiciones

$$-5c_3 = 5 \quad , \quad -5c_2 = -10 \quad , \quad -5c_1 = 40 \Rightarrow c_3 = -1 \quad , \quad c_2 = 2 \quad , \quad c_1 = -8$$

de donde una solución particular es

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Utilizamos variación de parámetros. Con la información dada deducimos que una matriz fundamental es

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

con inversa

$$\Phi^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{bmatrix}$$

Luego, una solución particular es

$$\begin{aligned}
\vec{x}_p &= \Phi \int \Phi^{-1} \begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix} dt \\
&= \frac{1}{3}\Phi \int \begin{bmatrix} 2te^{-t} + 1 \\ te^t - e^{2t} \end{bmatrix} dt \\
&= \frac{1}{3}\Phi \begin{bmatrix} -2(1+t)e^{-t} + t \\ (t-1)e^t - \frac{1}{2}e^{2t} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2(1+t) + te^t + (t-1) - \frac{1}{2}e^t \\ -2(1+t) + te^t - 2(t-1) + e^t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 - t + (t - \frac{1}{2})e^t \\ -4t + (t+1)e^t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Asignación de puntaje:

a)
- Identificar forma de $\vec{x}_p$ correcta: **1 punto**
- Encontrar solución particular correcta: **1 punto**

b)
- Identificar matriz fundamental: **1 punto**
- Obtener matriz fundamental inversa: **1 punto**
- Aplicar fórmula de variación de parametros: **1 punto**
- Obtener solución particular correcta: **1 punto**

Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

2. Encuentre la solución del PVI

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} \quad , \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una solución:

Método de vectores propios:

Sea A la matriz de coeficientes. Puesto que es triangular inferior, leemos directamente que su único valor propio es -1. Como

$$A + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

el espacio propio es de dimensión 1. Tomamos como generador

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para construir una segunda solución linealmente independiente buscamos $\vec{P}$ tal que

$$(A + I)\vec{P} = \vec{K}$$

sistema del cual se puede obtener la solución

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución general del problema es

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-t}.$$

Para resolver el PVI necesitamos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Luego, la solución del PVI es

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + 2 \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-t}.$$

Método de matriz exponencial:

Sea A la matriz de coeficientes. Entonces $A = -I + N$ donde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es nilpotente con $N^2 = 0$. Luego

$$e^{At} = e^{-It} e^{Nt} = e^{-t} I \left(I + Nt \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$$

y entonces la solución del PVI es

$$\vec{x} = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 2t \end{bmatrix}.$$

Asignación de puntaje:

Método 1:
- Determinar valor propio: **1 punto**
- Encontrar vector propio: **1 punto**
- Ecuación para vector propio generalizado: **0,5 puntos**
- Encontrar vector propio generalizado: **1 punto**
- Escribir solución a partir de vector propio: **1 punto**
- Escribir solución a partir de vector propio generalizado: **1 punto**
- Resolver el PVI: **0,5 puntos**

Método 2:
- Identificar A como nilpotente más diagonal: **1 punto**
- Exponencial de diagonal: **1 punto**
- Exponencial de Nilpotente: **1 punto**
- Exponencial de A: **1 punto**
- Expresar solución del PVI: **1 punto**
- Calcular solución del PVI: **1 punto**

Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

3. Encuentre la solución general de

$$u''' + 3u'' + 3u' + u = e^{-x}.$$

Una solución:

La EDO tiene ecuación auxiliar

$$0 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3$$

con única raiz $m = -1$, de modo que el problema homogéneo tiene solución general

$$u_c = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}.$$

Para encontrar una solución particular usamos coeficientes indeterminados. Puesto que intentar $u_p = Ae^{-x}$ produciría duplicación con la solución del problema homogéneo, utilizamos en vez $u_p = Ax^3 e^{-x}$. Calculamos

$$\begin{aligned} u_p{}' &= A3x^2 e^{-x} - Ax^3 e^{-x} \\ u_p'' &= A6x e^{-x} - A6x^2 e^{-x} + Ax^3 e^{-x} \\ u_p''' &= A6e^{-x} - A18x e^{-x} + A9x^2 e^{-x} - Ax^3 e^{-x} \end{aligned}$$

de modo que

$$u_p''' + 3u_p'' + 3u_p' + u_p = 6Ae^{-x}$$

y entonces

$$u_p = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}.$$

Luego, la solución general es

$$u = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$$

Método de aniquiladores:

La EDO puede resolverse por el método de aniquiladores. Primero la reescribimos como

$$(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)u = 6e^{-x} \Leftrightarrow (D+1)^3 u = 6e^{-x}.$$

Puesto que $D+1$ aniquila e^{-x}, al aplicar este operador en ambos lados obtenemos que la solución general de la EDO debe pertenecer a la familia de soluciones del problema homogéneo

$$(D+1)^4 u = 0$$

es decir, debe ser de la forma

$$u = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + c_4 x^3 e^{-x}$$

Puesto que los tres primero términos son la solución del problema homogeno $(D+1)^3 u = 0$, reconocemos que la solución particular debe provenir del término $c_4 x^3 e^{-x}$. Al poner este término en la EDO se descubre que $c_4 = 1/6$, llegando entonces a la misma solución.

Asignación de puntaje:

- Determinar ecuación auxiliar (o escribir EDO en lenguaje de operador): **0,5 puntos**

- Determinar raiz $m = -1$ (o aplicar aniquilador): **0,5 puntos**
- Obtener solución problema homogéneo (o solución del problema de orden 4): **1,5 puntos**
- Determinar u_p correcto a intentar: **1 punto**
- Derivadas de u_p: **1 punto**
- Determinar u_p: **1 punto**
- Escribir solución general: **0,5 puntos**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

4. Use que $u(x) = x$ es solución de $x^2u'' - 3xu' + 3u = 0$ para determinar la solución general de

$$x^2u'' - 3xu' + 3u = 2x^4e^x$$

en $(0, \infty)$. ¿Es esta también la solución general de la EDO en todo $\mathbb{R}$? Justifique.

Una solución:

Sea $u_1 = x$. Reescribiendo la EDO como

$$u'' - \frac{3}{x}u' + \frac{3}{x^2}u = 2x^2e^x$$

tenemos que una segunda solución del problema homogéno LI de u_1 es

$$u_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{3}{x}dx}}{x^2}dx = x\int xdx = \frac{x^3}{2}.$$

Por simplicidad, preferimos utilizar $u_2 = x^3$ (la cual también es solución LI de u_1).

Para encontrar una solución particular usamos variación de parámetros. Calculamos

$$W = \det\begin{bmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{bmatrix} = 2x^3 \quad , \quad W_1 = \det\begin{bmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{bmatrix} = -2x^5e^x \quad , \quad W_2 = \det\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{bmatrix} = 2x^3e^x$$

de modo que

$$y_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x \Rightarrow y_1 = -e^x(x^2 - 2x + 2)$$

y

$$y_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x \Rightarrow y_2 = e^x.$$

Luego, una solución particular es

$$u_p = u_1y_1 + u_2y_2 = -e^x(x^3 - 2x^2 + 2x) + x^3e^x = (2x^2 - 2x)e^x.$$

y la solución general es

$$u = c_1x + c_2x^3 + (2x^2 - 2x)e^x.$$

Aunque esta familia es solución en todo $\mathbb{R}$ no es la solución general allí. Por ejemplo, se puede verificar

$$u = \begin{cases} (2x^2 - 2x)e^x & , x \leq 0 \\ x^3 + (2x^2 - 2x)e^x & , x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución singular.

Asignación de puntaje:

- Poner EDO en forma estandar (podría estar implícito): **1 punto**
- Fórmula para segunda solución: **0,5 puntos**
- Encontrar segunda solución: **0,5 punto**
- Cálculo de W: **0,5 puntos**
- Fórmula correcta para y_1': **0,5 puntos**
- Encontrar y_1: **0,5 puntos**
- Fórmula correcta para y_2': **0,5 puntos**
- Encontrar y_2: **0,5 puntos**

- Escribir u_p: **0,5 puntos**
- Escribir solución general: **0,5 puntos**
- Exhibir solución singular: **0,5 puntos**

Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*