Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2026

Interrogación 3 MAT1640
PAUTA

1. Encuentre e^{At} para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encuentre luego la solución de

$$X' = AX + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Una solución:

A es nilpotente con $A^3 = 0$, de modo que

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t & 1 & 0 \\ 5t + \frac{3}{2}t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$$

La solución del problema homogeneo es $X_c = e^{At}C$, mientras que una solución particular es

$$X_p = e^{At} \int e^{-At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = e^{At} \int \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Luego la solución general es

$$X = e^{At}C + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

y de

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = X(0) = C$$

obtenemos que la solución del PVI es

$$X = e^{At} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6t + 5 \\ 15t + 3t^2 - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Asignación de puntaje:

- Utilizar A es nilpotente: 0,5 puntos.

- Obtener matriz exponencial: 2 puntos.
- Obtener solución del problema homogeneo: 1 punto.
- Obtener solución particular: 1,5 puntos.
- Determinar C: 0,5 puntos.
- Solución del PVI: 0,5 puntos.

2. Considere dos estanques que comienzan en $t = 0$ llenos de salmuera. El estanque 1 tiene capacidad de $50L$ mientras que el estanque 2 tiene capacidad de $20L$. Suponga que los estanques están conectados de manera que del estanque 1 al estanque 2 fluyen $2L$ de salmuera por minuto, y que del estanque 2 al estanque 1 fluyen $1L$ de salmuera por minuto. Además, el estanque 2 pierde $1L$ de salmuera por minuto, mientras que el estanque 1 recibe una salmuera que contiene $1kg$ de sal por litro, a una tasa de $1L$ de salmuera por minuto.

   a) Determine una EDO que modela el sistema.

   b) Determine una solución particular de la EDO.

   c) Use analísis de estabilidad para determinar el comportamiento cuando $t \to \infty$ de la solución del problema homogéneo.

   d) Determine la cantidad de sal en el estanque 1 en límite cuando $t \to \infty$.

Una solución:

Si $x_i(t)$ es la cantidad de sal en el estanque i, y X es el vector cuyos componentes son los x_i, entonces el sistema se puede modelar como

$$X' = \begin{bmatrix} -1/25 & 1/20 \\ 1/25 & -1/10 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar una solución particular intentamos variación de parámetros (notemos que la matriz de coeficientes es invertible, y por lo tanto no hay duplicación). De

$$X_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad , \quad X_p' = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} -1/25 & 1/20 \\ 1/25 & -1/10 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a/25 + b/20 \\ a/25 - b/10 \end{bmatrix}$$

deducimos que X_p es solución particular para $b = 20$, $a = 50$.

El sistema homogeneo

$$X' = \begin{bmatrix} -1/25 & 1/20 \\ 1/25 & -1/10 \end{bmatrix} X$$

tiene como único punto crítico el origen. Además, de

$$\tau = -1/25 - 1/10 < 0 \quad , \quad \Delta = 1/250 - 1/500 = 1/500 > 0$$

deducimos que los valores propios tienen ambos parte real negativa. Luego, el origen es asíntoticamente estable, de modo que, independiente de la condición inicial, la solución del problema homogeneo X_c cumple

$$\lim_{t \to \infty} X_c = 0.$$

Como la solución del sistema es

$$X = X_c + X_p = X_c + \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

para algún X_c solución del problema homogéneo, y dada la observación anterior, se deduce que

$$\lim_{t \to \infty} X = \lim_{t \to \infty} X_c + \lim_{t \to \infty} \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

de modo que cuando $t \to \infty$ la cantidad de sal en el estanque 1 es

$$\lim_{t \to \infty} x_1(t) = 50.$$

Asignación de puntaje:

- Obtener sistema: 1 punto.
- Determinar solución particular: 1 punto.
- Estudiar estabilidad del punto crítico: 1 punto.
- Establecer comportamiento asíntotico de solución del problema homogeneo: 1 punto.
- Estudiar comportamiento asíntotico del sistema: 1 punto.
- Responder pregunta: 1 punto.

3. Para α un parámetro real tal que $0 < \alpha^2 < 1$ considere

$$x' = -\alpha x + xy$$
$$y' = 1 - \alpha y - x^2.$$

Determine y clasifique (en cuanto a tipo y estabilidad) los puntos críticos de este sistema.

Una solución:

Buscamos primero los puntos críticos. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} x(-\alpha + y) & = 0 \\ 1 - \alpha y - x^2 & = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$ entonces se cumple la primera ecuación y la segunda también cuando $y = 1/\alpha$. La otra alternativa en la primera ecuación es $y = \alpha$ en cuyo caso

$$0 = 1 - \alpha^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \alpha^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Luego, los puntos críticos son $c_1 = (0, 1/\alpha)$, $c_2 = (\sqrt{1-\alpha^2}, \alpha)$, y $c_3 = (-\sqrt{1-\alpha^2}, \alpha)$.

El Jacobiano del sistema es

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -\alpha + y & x \\ -2x & -\alpha \end{bmatrix}.$$

En c_1, J es

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha^2)/\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

con determinante $-(1 - \alpha^2) < 0$. Luego, el punto critico es tipo silla, inestable.

En c_2, J es

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-\alpha^2} \\ -2\sqrt{1-\alpha^2} & -\alpha \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1 - \alpha^2) > 0$ y traza $-\alpha$. Luego, para $\alpha \in (0, 1)$ el punto crítico es asíntoticamente estable, mientras que para $\alpha \in (-1, 0)$ es inestable. Puesto que

$$(-\alpha)^2 - 8(1 - \alpha^2) = 9\alpha^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \geq 8/9$$

vemos que el punto crítico es tipo nodo para $\alpha \in (-1, -\sqrt{8/9}) \cup (\sqrt{8/9}, 1)$ y tipo espiral para $\alpha \in (-\sqrt{8/9}, 0) \cup (0, \sqrt{8/9})$. Si $\alpha = \pm\sqrt{8/9}$ no sabemos si es nodo o espiral.

En c_3, J es

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{1-\alpha^2} \\ 2\sqrt{1-\alpha^2} & -\alpha \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1 - \alpha^2) > 0$ y traza $-\alpha$. Luego, el análisis es exactamente igual que en el caso de c_2.

Asignación de puntaje:

- Encontrar puntos críticos: 1,5 puntos.
- Calcular Jacobiano: 0,5 puntos.
- Evaluar Jacobiano en puntos críticos: 0,5 puntos.
- Clasificar c_1: 1 punto.
- Determinar estabilidad según α para c_2 y c_3: 1 punto.
- Determinar tipo según α para c_2 y c_3: 1,5 puntos.

4. Considere, para un entero positivo m, el PVI

$$x'' + 16x = \begin{cases} \cos(4t) & , 0 \leq t < m\pi \\ 0 & , t \geq m\pi \end{cases} \quad , \quad x(0) = 1 \quad , \quad x'(0) = 0.$$

Este PVI puede usarse para modelar un sistema masa-resorte sujeto a un forzamiento periodico que termina en $t = m\pi$. Muestre, resolviendo el PVI, que para $t \geq m\pi$ el sistema responde oscilando como un sistema libre. ¿Qué ocurre con la amplitud de esta respuesta oscilatoria a medida que $m \to \infty$?.

Una solución:

Observemos que el forzamiento puede reescribirse como $\cos(4t)(1 - U(t - m\pi))$, con transformada de Laplace

$$\frac{s}{s^2+16} - e^{-m\pi s}\mathcal{L}\left(\cos(4(t+m\pi))\right) = \frac{s}{s^2+16} - e^{-m\pi s}\mathcal{L}\left(\cos(4t)\right) = \left(1 - e^{-m\pi s}\right)\frac{s}{s^2+16}.$$

De este modo, al aplicar Laplace al PVI se obtiene

$$-s + s^2X + 16X = \left(1 - e^{-m\pi s}\right)\frac{s}{s^2+16} \Leftrightarrow X = \frac{s}{s^2+16} + \left(1 - e^{-m\pi s}\right)\frac{s}{(s^2+16)^2}.$$

Puesto que

$$\frac{s}{(s^2+16)^2} = -\frac{1}{8}\frac{d}{ds}\frac{4}{s^2+16}$$

obtenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+16)^2} = \frac{1}{8}t\,\mathrm{sen}(4t)$$

y entonces

$$x(t) = \cos(4t) + \frac{1}{8}t\,\mathrm{sen}(4t) - \frac{1}{8}(t - m\pi)\,\mathrm{sen}(4(t - m\pi))U(t - m\pi).$$

Para $t \geq m\pi$ tenemos $U(t - m\pi) = 1$ de modo que

$$x(t) = \cos(4t) + \frac{1}{8}t\,\mathrm{sen}(4t) - \frac{1}{8}t\,\mathrm{sen}(4t) + \frac{m\pi}{8}\,\mathrm{sen}(4t) = \cos(4t) + \frac{m\pi}{8}\,\mathrm{sen}(4t)$$

el cual corresponde a la oscilación de un sistema libre con amplitud

$$A = \sqrt{1 + \frac{m^2\pi^2}{64}}.$$

En particular, la amplitud tiende a infinito cuando $m \to \infty$.

Asignación de puntaje:

- Reescribir forzamiento: 0,5 puntos.
- Transformada de forzamiento: 1 punto.
- Transformada de PVI: 0,5 puntos.
- Obtener X: 0,5 puntos
- Inversa de $s/(s^2+16)^2$: 1 punto.
- Encontrar x: 1 punto.
- Observar oscilación: 0,5 puntos.
- Determinar amplitud: 0,5 puntos.
- Determinar comportamiento asíntotico de amplitud: 0,5 puntos.