Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2023

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Examen

1. Considere el problema de valor inicial,

$$\begin{cases} y' = 4x\sqrt{y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

   a) Justificadamente, asigne un valor a y_0 de manera que el problema tenga solución única.

   b) Justificadamente, asigne un valor a y_0 de manera que el problema tenga más de una solución. Entregue dos de estas soluciones.

Solución.

a) La función $f(x,y) = 4x\sqrt{y}$ y $f_y(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{y}}$ son continuas sobre $\Omega = \{(x,y) \,|\, x \in \mathbf{R}, y > 0\}$. Por el teorema de existencia y unicidad se tenderá que para todo (x_0, y_0) el PVI $y(x_0) = y_0$ tendrá solución única sobre alguna región rectangular abierta que contenga dicho punto. El particular, podremos considerar la condición inicial $y(0) = 1$.

b) Las funciones $y \equiv 0$ e $y = x^4$ son soluciones al PVI con $y(0) = 0$.

Evaluación.

- Asignar (**0.5 pto**) por determinar correctamente un conjunto sobre el cuál f es continua.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar correctamente un conjunto sobre el cuál f_y es continua.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente un conjunto sobre el cuál f y f_y son simultáneamente continuas.
- Asignar (**1 pto**) por determinar un valor de y_0 en el conjunto en que f y f_y son simultáneamente continuas, para que el PVI tenga solución única.
- Asignar (**1 pto**) por decir que $y_0 = 0$ para que haya más de una solución.
- Asignar (**1 pto**) por decir que $y \equiv 0$ es una de las soluciones al PVI $y(0) = 0$.
- Asignar (**1 pto**) por decir que $y(x) = x^4$ es una de las soluciones al PVI $y(0) = 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se haya resuelto la ecuación diferencial o se haya verificado que satisface la edo. Si el estudiante solo escribe la solución sin resolver la edo y verificar que la satisface, asignar (**0.5 pto**).

2. Dada la ecuación diferencial

$$x^4y''(x) + 9x^3y'(x) + 16x^2y(x) = \ln(x).$$

en el intervalo $(0, \infty)$.

a) Verifique que $y_1(x) = \dfrac{1}{x^4}$ e $y_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^4}$ son soluciones linealmente independientes sobre $(0, \infty)$ de la ecuación homogénea asociada. Justifique la independencia usando el Wronskiano.

b) Determine la solución general de la ecuación no homogénea.

Solución.

a) Calculemos el wronskiano de y_1 e y_2.

$$W(y_1, y_2) = \left| \begin{bmatrix} 1/x^4 & \ln(x)/x^4 \\ -4/x^5 & (1 - 4\ln(x))/x^5 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{x^9}$$

Como el wronskiano es diferente de cero sobre $(0, \infty)$ entonces las soluciones son linealmente independientes.

b) Usando el método de variación de parámetros tendremos que la solución particular es de la forma $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\ln(x)/x^4}{W}\,dx = -\int x\ln^2(x)\,dx = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2\ln^2(x)}{2}$$
$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)\ln(x)/x^5}{W}\,dx = \int x\ln(x)\,dx = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2\ln(x)}{2}$$

Luego, la solución particular está dada por

$$y_p(x) = \frac{\ln(x) - 1}{4x^2}$$

Finalmente, la solución general de esta ecuación es:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^4} + \frac{c_2\ln(x)}{x^4} + \frac{\ln(x) - 1}{4x^2}$$

Evaluación.

- Asignar (**0.5 pto**) por verificar que y_1 es solución homogénea de la edo.
- Asignar (**1 pto**) por verificar que y_2 es solución homogénea de la edo.
- Asignar (**0.5 pto**) por calcular correctamente el wronskiano de y_1 e y_2.
- Asignar (**1 pto**) por concluir a partir del wronskiano que y_1 e y_2 son l.i.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente u_1.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente u_2.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente la solución general. Si el estudiante determina de forma incorrecta u_1 ó u_2 (a lo más una de ellas) pero en adelante no comete más errores, asignar (**0.5 pto**) por escribir la solución general que haya obtenido.

3. Considere el siguiente sistema casi lineal

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x - 2xy \\ \dfrac{dy}{dt} &= -3y + 6xy \end{cases}$$

(a) Encuentre los puntos críticos asociados al sistema.

(b) Linealice el sistema dado para cada punto crítico encontrado.

(c) Clasifique según tipo (nodo propio, nodo impropio, punto silla, espiral o centro) y por estabilidad (estable, inestable, asintóticamente estable) los puntos críticos de la parte (a).

Solución.

a) El sistema se puede escribir como

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x(1 - 2y) \\ \dfrac{dy}{dt} &= y(-3 + 6x) \end{cases}$$

luego los puntos críticos del sistema son $(0, 0)$ y $(1/2, 1/2)$.

b) La matriz jacobiana del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 - 2y & -2x \\ 6y & -3 + 6x \end{bmatrix}$$

luego los sistemas linealizados para nuestros puntos críticos son:

- **Punto crítico** $(0, 0)$**.**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x \\ \dfrac{dy}{dt} &= -3y \end{cases}$$

- **Punto crítico** $(1/2, 1/2)$**.**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -y \\ \dfrac{dy}{dt} &= 3x \end{cases}$$

c) El sistema linealizado para el punto crítico $(0, 0)$ tiene valores propios 1 y -3 por lo que $(0, 0)$ es un punto silla inestable.

El sistema linealizado para el punto crítico $(1/2, 1/2)$ tiene valores propios $-i\sqrt{3}$ e $i\sqrt{3}$ por lo que $(1/2, 1/2)$ no se puede clasificar (puede ser estable, inestable o asintóticamente estable).

Evaluación.

- Asignar (**0.5 pto**) por determinar a $(0, 0)$ como punto crítico del sistema.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar a $(1/2, 1/2)$ como punto crítico del sistema.

- Asignar (**1 pto**) por determinar el sistema linealizado asociado a al punto crítico $(0, 0)$.
- Asignar (**1 pto**) por determinar el sistema linealizado asociado a al punto crítico $(1/2, 1/2)$.
- Asignar (**0.25 pto**) por determinar a $\lambda = 1$ valor propio asociado al punto crítico $(0, 0)$.
- Asignar (**0.25 pto**) por determinar a $\lambda = -3$ valor propio asociado al punto crítico $(0, 0)$.
- Asignar (**0.25 pto**) por determinar a $\lambda = -i\sqrt{3}$ valor propio asociado al punto crítico $(1/2, 1/2)$.
- Asignar (**0.25 pto**) por determinar a $\lambda = i\sqrt{3}$ valor propio asociado al punto crítico $(1/2, 1/2)$.
- Asignar (**0.5 pto**) por decir que $(0, 0)$ es un punto silla.
- Asignar (**0.5 pto**) por decir que $(0, 0)$ es inestable.
- Asignar (**1 pto**) por decir que $(1/2, 1/2)$ no se puede clasificar o algo equivalente. Si el estudiante dice que el punto es centro asignar (**0.5 pto**). Si el estudiante dice que es centro pero no se puede decir nada sobre su estabilidad asignar (**1 pto**).

4. Usando transformada de Laplace, resuelva el siguiente problema con valor inicial,

$$\begin{cases} x'(t) + \displaystyle\int_0^t x(r)\,dr = \delta(t-\pi) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

siendo δ la función **delta de Dirac** soportada en $t = 0$.

Nota. $\delta(t-\pi) = \delta_\pi(t)$.

Solución. Aplicando transformada de Laplace tendremos que el PVI queda dado por

$$sX(s) - x(0) + \frac{X(s)}{s} = e^{-s\pi}$$

siendo $X(s)$ a la transformada de Laplace de $x(t)$ y $x(0) = 1$. Resolviendo esta última ecuación para $X(s)$ tendremos

$$X(s) = \frac{se^{-s\pi}}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}$$

de donde se concluye que

$$x(t) = \cos(t) + H(t-\pi)\cos(t-\pi)$$

siendo H la función de Heaviside.

Evaluación. Sea $\mathcal{L}$ la transformada de Laplace.

- Asignar (**1 pto**) por $\big(\mathcal{L}x'(t)\big)(s) = X(s) - x(0)$ o bien $\big(\mathcal{L}x'(t)\big) = X(s) - 1$.
- Asignar (**1 pto**) por $\big(\mathcal{L}\displaystyle\int_0^t x(r)\,dr\big)(s) = \frac{X(s)}{s}$.
- Asignar (**0.5 pto**) por $\big(\mathcal{L}\delta_\pi\big)(s) = e^{-s\pi}$.
- Asignar (**1 pto**) por despejar $X(s)$.
- Asignar (**1 pto**) por determinar la transformada inversa de $\dfrac{s}{s^2+1}$.
- Asignar (**1 pto**) por determinar la transformada inversa de $\dfrac{se^{s\pi}}{s^2+1}$.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar $x(t)$.

Tabla de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(n \geq 0)$
t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$(a > -1)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	
$\operatorname{sen}(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	
$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	($H(t)$: func. de Heaviside)
$\frac{1}{2k}t\operatorname{sen}(kt)$	$\frac{s}{(s^2+k^2)^2}$	
$\frac{1}{2k^3}(\operatorname{sen}(kt) - kt\cos(kt))$	$\frac{1}{(s^2+k^2)^2}$	

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos