Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
18 de enero de 2013

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
Interrogación N° 2

1. *a*) Encuentre la solución general de la ecuación

$$y^{(iv)}(t) - 5y''(t) + 12y'(t) + 28y(t) = 0$$

si se sabe que la función $e^{2t}\cos(\sqrt{3}\,t)$ es una solución .

Respuesta : Si $y_1(t) = e^{2t}\cos(\sqrt{3}\,t)$ es solución, entonces también lo es $y_2(t) = e^{2t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\,t)$.

Ello nos dice que el polinomio característico, $p(r)$, de la ecuación, que es de cuarto grado, tiene las raíces $2 \pm \sqrt{3}\,i$.

Por una parte enemos que

$$p(r) = r^4 - 5r^2 + 12r + 28$$

y sabemos que es divisible por

$$\Big(r - (2+\sqrt{3}\,i)\Big)\,\Big(r - (2-\sqrt{3}\,i)\Big) = (r-2)^2 + 3 = r^2 - 4r + 7.$$

Luego, $p(r) = (r^2 - 4r + 7)\,q(r)$ para cierto polinomio cuadrático $q(r)$.

Por división de polinomios,

$$q(r) = p(r) : (r^2 - 4r + 7) = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$$

y tiene la raíz $r = -2$ con multiplicidad 2.

Ello implica que las funciones

$$y_3(t) = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y_4(t) = te^{-2t}$$

son también soluciones.

Como las funciones y_1, y_2, $y_3\,y_4$ son linealmente independientes, la solución general de la ecuación dada es

$$Y(t) = C_1\,e^{2t}\cos(\sqrt{3}\,t) + C_2\,e^{2t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\,t) + C_3\,e^{-2t} + C_4\,te^{-2t} \quad \square$$

b) Dada la ecuación $y'' + y = f(t)$, demuestre que el método de variación de parámetros conduce a la solución particular

$$y_p(y) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{sen}(t-u)\,du.$$

Solución : La ecuación homogénea asociada, $y'' + y = 0$, tiene las soluciones linealmente independendientes

$$y_1(t) = \cos(t)\,; \quad y_2(t) = \mathrm{sen}(t).$$

Entonces, el método de variación de parámetros nos lleva a buscar una solución particular de la ecuación original que será

$$\begin{aligned} y_P(t) &= -\cos(t)\int_0^t f(u)\,\mathrm{sen}(u)\,du + \mathrm{sen}(t)\int_0^t f(u)\cos(u)\,du \\ &= \int_0^t f(u)\,(\mathrm{sen}(t)\cos(u) - \cos(t)\,\mathrm{sen}(u))\,du \\ &= \int_0^t f(u)\,\mathrm{sen}(t-u)\,du \quad \square \end{aligned}$$

2. Encuentre la solución general de la ecuación

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = te^t + 2t\,.$$

Respuesta : La solución general es

$$Y(t) = y_H(t) + y_P(t),$$

donde y_H es la solución general de la *ecuación homogénea asociada*, $y'' - 3y' + 2y = 0$ e y_P es cualquier solución particular.

- Para hallar y_H consideramos la ecuación característica, $r^2 - 3r + 2 = 0,$ la cual tiene raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$. Por tanto,
$$y_H(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{2t}\,.$$

- Para hallar y_P usamos el *método de coeficientes indeterminados* (el de variación de parámetros es una alternativa válida). Para ello buscamos una función de la forma

$$Y_P(t) = (At + B) + (Ct^2 + Dt)\, e^t.$$

Derivando dos veces obtenemos

$$Y_P'(t) = A + (Ct^2 + Dt + 2Ct + D)\, e^t$$

$$Y_P''(t) = (Ct^2 + Dt + 4Ct + 2D + 2C)\, e^t.$$

Así,

$$Y_P'' - 3Y_P' + 2Y_P = (2B - 3A) + 2At - 2Cte^t + (2C - D)\, e^t$$

e igualando al lado derecho de la ecuación obtenemos el sistema de ecuaciones

$$2B - 3A = 0; \qquad 2A = 2; \qquad -2C = 1; \qquad 2C - D = 0,$$

de donde $A = 1;\ B = 3/2;\ C = -1/2;\ D = -1,$ con lo cual

$$Y_P(t) = t + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\, t^2 + t\right) e^t.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$Y(t) = t + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\, t^2 + t\right) e^t + C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} \quad \square$$

3. Un **peso** de 6 libras produce un estiramiento de 4 pulgadas en un resorte. Una vez que el sistema peso–resorte está en equilibrio se le aplica una fuerza hacia abajo la que le imprime una velocidad de 10 pulgadas por segundo. Encuentre la distancia que recorre el peso hacia abajo antes de empezar a regresar y el tiempo que demora en recorrer dicha distancia. (Use $g = 32$ para la constante de gravitación e ignore cualquier fuerza de amortiguación).

Respuesta : Sea Y el eje vertical a lo largo del cual oscila el sistema peso–resorte, con la dirección positiva hacia abajo. Elegimos el origen en la posición de equilibrio del peso con el resorte.

Si $y(t)$ es la posición del peso despus de t segundos, tenemos que la única fuerza que actúa sobre él es la ejercida por el resorte. No habiendo amortiguación, la ecuación diferencial para $y(t)$ es

$$my''(t) + ky(t) = 0,$$

donde $m = 6/g = 3/16$ es la masa del peso–resorte y k es la constante de restauración del resorte.

Para obtener k usamos que una fuerza de 6 libras (el peso) produce una elongación de 4 pulgadas. Por la ley de Hooke,

$$6 = k \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, la ecuación diferencial es

$$\frac{3}{16}\, y''(t) + \frac{3}{2}\, y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(t) + 8y(t) = 0.$$

La solución general es

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{8}\, t) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{8}\, t)\,.$$

Además tenemos las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $y'(0) = 10$. Por tanto,

$$C_1 = 0 \quad \& \quad C_2\sqrt{8} = 10 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{10}{\sqrt{8}}\,.$$

De este modo, la ecuación para el movimiento es

$$y(t) = \frac{10}{\sqrt{8}} \operatorname{sen}(\sqrt{8}\, t)\,.$$

Su elongación máxima es la amplitud. Esto es, $\dfrac{10}{\sqrt{8}}$ pulgadas.

El tiempo que ésta toma es T donde $\sqrt{8}\, T = \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; T = \dfrac{\pi}{2\sqrt{8}}$ segundos $\square$

4. Utilice transformadas de Laplace para resolver el P.V.I.

$$x'' + x = \cos^2(t)\,; \qquad x(0) = x'(0) = 1.$$

Solución : Aplicando $\mathcal{L}$ a ambos lados Y usando las propiedades relativas a la transformada de una derivada obtenemos

$$s^2\mathcal{L}\{x\} - sx(0) - x'(0) + \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{\cos^2(t)\} \quad \Rightarrow \quad (s^2+1)\mathcal{L}\{x\} = s + 1 + \mathcal{L}\{\cos^2(t)\},$$

pues $x(0) = x'(0) = 1$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{\mathcal{L}\{\cos^2(t)\}}{s^2+1}$$

y tomando transformada inversa,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\cos^2(t)\} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right\} \\ &= \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\cos^2(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\}\right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, por el Teorema de Convolución,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}\right\} = f(t) * g(t),$$

por lo cual,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\cos^2(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\}\right\} &= \cos^2(t) * \operatorname{sen}(t) \\ &= \int_0^t \cos^2(x)\operatorname{sen}(t-x)\,dx \\ &= \operatorname{sen}(t)\int_0^t \cos^3(x)\,dx - \cos(t)\int_0^t \cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos(t) - \frac{1}{6}\cos(2t)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos(t) - \frac{1}{6}\cos(2t) \quad \square$$