Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2026

MAT1640 - Ecuaciones diferenciales ordinarias
Examen Final

1. **(6 pts)**
   (a) Considere la ecuación diferencial

$$y' = y(2 - y).$$

   (i) Encuentre los puntos de equilibrio y clasifíquelos como estables o inestables y bosqueje el diagrama de fase correspondiente.
   (ii) Resuelva el PVI con condición inicial $y(0) = 1$ y determine el intervalo maximal de definición de la solución.

   (b) Considere la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\, y = Q(x),$$

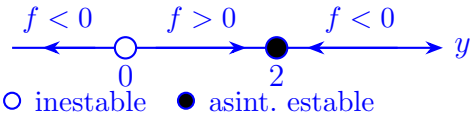
   sabiendo que $\mu(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ es un factor integrante y que $y_p(x) = \frac{1}{2}$ es una solución particular.
   (i) Determine $P(x)$ y $Q(x)$,
   (ii) Determine la solución general $y(x)$.
   (iii) Encuentre el valor de $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que la solución que satisface $y(0) = y_0$ sea acotada en todo $\mathbb{R}$. ¿Es único? Justifique.

Solución.

(a) (i) Se trata de una ecuación diferencial autónoma cuyos puntos de equilibrio satisfacen $f(y) = y(2-y) = 0$ o sea son 0 y 2. Calculamos $f'(y) = 2(1-y)$ y notemos que

$f'(0) = 2 > 0$ y por lo tanto 0 es **inestable**,
$f'(2) = -2 < 0$ y por lo tanto 2 es **asintóticamente estable**,

Diagrama de fase:



(ii) Notemos que las funciones $y \equiv 0$ y $y \equiv 2$ son soluciones de equilibrio para la ecuación diferencial pero no satisfacen la condición inicial $y(0) = 1$ y

por lo tanto no pueden ser soluciones del PVI. Sea $y \notin \{0, 2\}$. Resolvemos la ecuación por separación de variables tal que

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(2-y)} = \mathrm{d}t,$$

donde la descomposición en fracciones parciales nos permite escribir

$$\frac{1}{y(2-y)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y}\Big),$$

y luego

$$\ln\left|\frac{y}{2-y}\right| = 2t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

o sea

$$\frac{y}{2-y} = C_2\mathrm{e}^{2t}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Por la condición inicial $y(0) = 1$ deducimos que $C_2 = 1$ y luego la solución del PVI está dada por

$$y(t) = \frac{2\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}},$$

y está definida en todo $\mathbb{R}$. Notemos que la solución converge al equilibro cuando $t \to +\infty$ tal que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 2$.

(b) Por la definición de factor integrante, tenemos

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x^2},$$

y por lo tanto

$$\int P(x)\mathrm{d}x = -x^2,$$

y luego

$$P(x) = -2x.$$

Como $y_p(x) = \frac{1}{2}$ es solución particular entonces sustituyendo en la EDO, se obtiene

$$0 + P(x)\cdot\tfrac{1}{2} = Q(x)$$

o sea

$$Q(x) = -x.$$

En particular, la EDO es $y' - 2xy = -x$ y usando el factor integrante e^{-x^2}, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x^2}y\right] = -x\mathrm{e}^{-x^2} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x^2})'.$$

que integramos para obtener

$$\mathrm{e}^{-x^2}y = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

y luego la solución general está dada por

$$y(x) = \tfrac{1}{2} + c\mathrm{e}^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(iii) Aplicando la condición $y(0) = y_0$, obtenemos $c = y_0 - \frac{1}{2}$ y la solución del PVI será

$$y(x) = \frac{1}{2} + (y_0 - \tfrac{1}{2})\ \mathrm{e}^{x^2},$$

y como $\lim_{|x|\to+\infty} \mathrm{e}^{x^2} = +\infty$ entonces la solución es acotada en todo $\mathbb{R}$ si y sólo si $y_0 = \frac{1}{2}$. Por ser una ecuación diferencial lineal con coeficientes P y Q continuos, para cada y_0 existe una solución única en $\mathbb{R}$. Cada y_0 determina únicamente $c = y_0 - \frac{1}{2}$ y solo $c = 0$ produce una solución acotada. Como dos soluciones con datos iniciales distintos no se cruzan entonces y_0 es único.

Distribución de puntaje.

(a)
- Asignar **(0.5 pt)** por determinar correctamente los dos equilibrios $y = 0$ e $y = 2$.
- Asignar **(1.5 pts)** por clasificarlos correctamente (**(0.5 pt)** por cada punto) y bosquejar el diagrama de fase **(0.5 pt)**.
- Asignar **(1 pt)** por resolver correctamente la ecuación. Descontar **(0.5 pt)** por a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pt)** por el intervalo maximal $\mathbb{R}$ con justificación.

(b)
- Asignar **(0.5 pt)** por determinar correctamente $P(x) = -2x$ desde la definición de factor integrante.
- Asignar **(0.5 pt)** por determinar correctamente $Q(x) = -x$ sustituyendo $y_p = \frac{1}{2}$.
- Asignar **(0.5 pt)** por resolver la ecuación lineal y obtener la solución general $y = \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{x^2}$.
- Asignar **(0.5 pt)** por determinar que $y_0 = \frac{1}{2}$.
- Asignar **(0.5 pt)** por justificar la unicidad invocando el TEU para EDOs lineales.

2. **(6 pts)** Sea $\mu \in \mathbb{R}$ un parámetro. Considere el sistema diferencial

$$(S_\mu) \quad \begin{cases} x'(t) = \mu x - y - xy^2, \\ y'(t) = x + \mu y - y^3. \end{cases}$$

(a) Demuestre que $(0,0)$ es el único punto de equilibrio de (S_μ) para todo $\mu \in \mathbb{R}$.
(b) Clasifíquelo cuando corresponde según los valores del parámetro μ.
(c) Escriba explícitamente el sistema linealizado de (S_μ) en torno al origen $(0,0)$ y encuentre su solución general para $\mu < 0$.

Solución.

(a) Los puntos de equilibrio satisfacen $\mu x - y - xy^2 = 0$ y $x + \mu y - y^3 = 0$.

$$\begin{cases} \mu x - y - xy^2 &= 0 \\ x + \mu y - y^3 &= 0. \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y y sumando, obtenemos

$$\mu(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)y^2 = 0$$

y por lo tanto

$$(x^2 + y^2)(\mu - y^2) = 0.$$

Si $x^2 + y^2 \neq 0$, entonces $y^2 = \mu$. Sustituyendo en la primera ecuación

$$\mu x - y - x\mu = 0,$$

obtenemos $y = 0$ y luego $\mu = 0$. Es una contradicción con $y^2 = \mu > 0$. Así, necesariamente $x^2 + y^2 = 0$ y el único equilibrio es $(0,0)$ para todo $\mu \in \mathbb{R}$.

(b) La matriz Jacobiana en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \mu - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 & \mu - 3y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{tal que} \quad J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de $J(0,0)$ es $(\lambda - \mu)^2 + 1 = 0$, con valores propios $\lambda_\pm = \mu \pm i$, siempre complejos conjugados con $\mathrm{Re}(\lambda) = \mu$.

- $\mu < 0$: $\mathrm{Re}(\lambda) = \mu < 0$. En este caso, el Teorema Hartman-Grobman aplica y $(0,0)$ es una **espiral asintóticamente estable**.
- $\mu = 0$: $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. En este caso, el Teorema de Hartman-Grobman **no aplica** (valores propios imaginarios puros) donde el sistema linealizado predice un centro, pero no se puede concluir la estabilidad del sistema no lineal.
- $\mu > 0$: $\mathrm{Re}(\lambda) = \mu > 0$. En este caso, el Teorema de Hartman-Grobman aplica y $(0,0)$ es una **espiral inestable**.

(c) El sistema linealizado en torno al origen se obtiene evaluando la Jacobiana en $(0,0)$ tal que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{cases} x' = \mu x - y, \\ y' = x + \mu y. \end{cases}$$

Para $\mu < 0$, los valores propios son $\lambda_\pm = \mu \pm i$ con vectores propios $v_\pm = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mp i \end{smallmatrix}\right)$. Tomando parte real e imaginaria de $\mathrm{e}^{(\mu+i)t} v_+$, obtenemos

$$\mathrm{e}^{(\mu+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i\, \mathrm{e}^{\mu t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

La solución general real del sistema linealizado para $\mu < 0$ es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mu t} \left[c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Distribución de puntaje.

(a) Asignar **(1 pt)** por la factorización $(x^2 + y^2)(\mu - y^2) = 0$ y la conclusión de unicidad. Descontar **(0.5 pt)** si falta la justificación de la contradicción.

(b)
- Asignar **(0.75 pt)** por $J(0,0)$ y los valores propios $\mu \pm i$.
- Asignar **(0.75 pt)** por $\mu < 0$: espiral asint. estable, HG aplica.
- Asignar **(0.75 pt)** por $\mu = 0$: HG no aplica, $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$.
- Asignar **(0.75 pt)** por $\mu > 0$: espiral inestable, HG aplica.
- Descontar **(0.5 pt)** si no se indica la aplicabilidad de HG.

(c)
- Asignar **(0.5 pt)** por el sistema linealizado correcto.
- Asignar **(0.5 pt)** por los vectores propios asociados.
- Asignar **(1 pt)** por la solución general real con $\mathrm{e}^{\mu t}$, $\cos t$, $\sin t$. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error.

3. **(6 pts)**

(a) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule e^{tA} para $t \in \mathbb{R}$ y verifique que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA}$. Justifique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

"La solución general del sistema $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ puede escribirse como $\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathbf{c}$ para algún $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$."

(b) Demuestre que la función $f(t) = \sin(\mathrm{e}^{t^2})$ es de orden exponencial pero que su derivada no lo es.

Solución.

(a) Notemos que $A = 2I + N$ donde la matriz N es nilpotente de orden 2 tal que $N^\ell = 0$ para todo $\ell \geq 2$ y donde $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces para $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \mathrm{e}^{t(2I+N)} \\ &= \mathrm{e}^{2tI}\ \mathrm{e}^{tN} \quad \text{porque } I \text{ y } N \text{ conmutan } IN = NI = N \\ &= \mathrm{e}^{2tI}\ \Big(I + tN\Big) \quad \text{usando la serie y la nilpotencia} \\ &= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La afirmación es **verdadera** porque la matriz e^{tA} es una matriz fundamental que satisface

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA}, \quad \mathrm{e}^{0A} = I,$$

.

(b) Recordamos que una función g es de orden exponencial cuando si existen constantes positivas $c, M > 0$ y $T > 0$ tales que $|g(t)| \leq M\mathrm{e}^{ct}$ para todo $t > T$. Notamos que la función $f(t) = \sin(\mathrm{e}^{t^2})$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y es acotada para todo $t \in \mathbb{R}$ y por lo tanto

$$|f(t)| \leq 1, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En particular, es de orden exponencial. Sin embargo, tenemos $f'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2}\cos(\mathrm{e}^{t^2})$ y no es de orden exponencial porque sino tendremos

$$|f'(t)| \leq 2|t|\mathrm{e}^{t^2} \leq M\mathrm{e}^{ct}$$

o sea lo que es absurdo porque

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{2|t|\mathrm{e}^{t^2}}{\mathrm{e}^{ct}} = \lim_{t\to+\infty} 2t\mathrm{e}^{t^2-ct} = +\infty.$$

Distribución de puntaje.

(a)
- Asignar **(0.75 pt)** por $A = 2I + N$ con N nilpotente y $\mathrm{e}^{tN} = I + tN$.
- Asignar **(0.75 pt)** por $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
- Si no se usa esta metodología, se asigna **(1.5 pt)** por calcular correctamente e^{tA}.
- Asignar **(0.5 pt)** por verificar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA}$.
- Asignar **(0.5 pt)** por responder **verdadera**.
- Asignar **(0.5 pt)** por justificar correctamente y $\mathrm{e}^{0\cdot A} = I$.

(b)
- Asignar **(1 pt)** por conocer la definición de una función de orden exponencial.
- Asignar **(1 pt)** por justificar que la función f es acotada en todo $\mathbb{R}$ y por concluir que es de orden exponencial.
- Asignar **(1 pt)** por calcular f' correctamente la derivada de f y justificar que la condición de orden exponencial no se cumple por ningún valor finito de $M > 0$.

4. **(6 pts)**

(a) Resuelva el PVI

$$y'' + 9y = \mathcal{U}(t-\pi) - \mathcal{U}(t-2\pi), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

donde $\mathcal{U}$ es la función de Heaviside (escalón unitario).

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y de orden exponencial. Demuestre que

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right\}(s) = \frac{F(s)}{s^2},$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ es la transformada de Laplace de f en s, utilizando únicamente el teorema de convolución y las propiedades operacionales de la Transformada de Laplace.

Aplique este resultado para calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^2(s^2+4)} \right\}$.

Solución.

(a) Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Con condiciones iniciales nulas, obtenemos

$$(s^2+9)\, Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi s} - \mathrm{e}^{-2\pi s}}{s}.$$

Descomponemos

$$\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{\frac{1}{9}}{s} - \frac{\frac{s}{9}}{s^2+9},$$

y definimos $h(t) = \dfrac{1-\cos(3t)}{9}$. Aplicamos la transformada de Laplace inversa tal que por el segundo teorema de traslación, tenemos

$$y(t) = h(t-\pi)\,\mathcal{U}(t-\pi) - h(t-2\pi)\,\mathcal{U}(t-2\pi).$$

Usando $\cos(3(t-\pi)) = -\cos(3t)$ y $\cos(3(t-2\pi)) = \cos(3t)$

$$y(t) = \frac{1+\cos(3t)}{9}\,\mathcal{U}(t-\pi) - \frac{1-\cos(3t)}{9}\,\mathcal{U}(t-2\pi).$$

(b) La integral es la convolución $(g * f)(t)$ con $g(t) = t$ tal que

$$\int_0^t (t-\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = (g * f)(t).$$

Por el Teorema de Convolución, tenemos

$$\mathcal{L}\{g * f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \cdot F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot F(s).$$

En particular, con $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4}$ y por lo tanto $f(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$ y luego

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right\} &= \int_0^t (t-\tau)\frac{\sin(2\tau)}{2}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{t(1-\cos(2t))}{4} - \frac{\sin(2t)-2t\cos(2t)}{8} \\ &= \frac{2t-\sin(2t)}{8}.\end{aligned}$$

Distribución de puntaje.

(a)
- Asignar **(0.5 pt)** por aplicar la transformada de Laplace correctamente con las condiciones iniciales y **(0.25 pt)** obtener $(s^2+9)Y(s) = \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-\pi s} - \mathrm{e}^{-2\pi s})$.
- Asignar **(0.5 pt)** por descomponer $\frac{1}{s(s^2+9)}$.
- Asignar **(0.5 pt)** por usar aplicar la transforma inversa correctamente.
- Asignar **(0.5 pt)** por usar el segundo teorema de traslación y simplificar. Descontar **(0.5 pt)** por a lo más un error.
- Asignar **(0.75 pt)** por expresar correctamente $y(t)$.

(b)
- Asignar **(0.5 pt)** por identificar la convolución de f con $g(t) = t$.
- Asignar **(0.75 pt)** por aplicar la transformada de Laplace y usar correctamente el Teorema de convolución para obtener la formula.
- Asignar **(0.25 pt)** por aplicar la formula para $F(s) = \frac{1}{s^2+4}$ y por lo tanto identificar $f(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$.
- Asignar **(1.5 pts)** por calcular la integral y obtener $\frac{1}{8}(2t - \sin(2t))$.

Tiempo: 2:00 horas **Sin consultas**