Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
26 de noviembre de 2012

MAT1640 ⋆ Ecuaciones Diferenciales

Solución de la Examen.

1. Resolver el Problema de Valor Inicial

$$xy'' + y' = 0; \qquad y(-2) = 1; \qquad y'(-2) = 1.$$

Solución:

Si ponemos $y' = u$, la ecuación es $xu' + u = 0$, de donde $xu = Cte$, es decir $xy'(x) = Cte$.

Por la condición inicial, la constante vale -2. Luego $xy'(x) = -2$ de donde $y(x) = -2\log|x| + Cte$.

Evaluando en $x = -2$ se tiene

$$y(x) = -2\log|x| + 1 + 2\log 2; \qquad x \neq 0$$

.

2. Una persona de un pueblo de 1000 habitantes contrajo la gripe. Si se supone que la gripe se propaga con una rapidez directamente proporcional al número de contagiados como también al número de no contagiados, determinar el número de contagiados cinco días después, si se observa que el número de contagiados después de un día es de 100.

Solución:

Sea $x(t)$ el número de contagiados después de t días. Entonces, por la información dada,

$$x'(t) \;=\; k\,x(t)\;(\,1000 - x(t)\,)$$

para cierta constante de proporcionalidad k.

Se trata de una ecuación separable:

$$\frac{dx}{x(1000-x)} \;=\; k\,dt \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{1000}\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1000-x}\right)dx \;=\; k\int dt$$

$$\longrightarrow\quad \frac{1}{1000}\ln\left(\frac{x}{1000-x}\right) \;=\; kt \,+\, C$$

de donde

$$\frac{x(t)}{1000-x(t)} \;=\; Ae^{1000\,kt} \qquad (A \;=\; e^{1000C}).$$

Como $x(0) \,=\, 1$ tenemos que $A \,=\, \dfrac{1}{999}\,.$

Como $x(1) \,=\, 100$ tenemos que $e^{1000k} \,=\, \dfrac{1}{A}\cdot\dfrac{100}{900} \,=\, 111,$ de donde $1000k \,=\, \ln(111)\,.$

Así pues, cuando $t = 5$ tenemos

$$\frac{x(5)}{1000-x(5)} \;=\; \frac{1}{999}\,e^{5\ln(111)}$$

y despejando,

$$x(5) \;=\; \frac{1000\,e^{5\ln(111)}}{999 \,+\, e^{5\ln(111)}} \;\approx\; 999.9999407$$

(o sea literalmente están todos contagiados : es el apocalipsis maya)

3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine la solución general de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

Solución:

El polinomio característico de la matriz A es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)((3+\lambda)(2+\lambda)-2) + 4(-(2+\lambda)+1) - 2(-2+(3+\lambda)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+4) - 6\lambda - 6 \\ &= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2. \end{aligned}$$

Por inspección, es fácil verificar que $\lambda_1 = -1$ es una de las raíces. De aquí deducimos que

$$p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2+3\lambda+2) = -(\lambda+1)^2(\lambda+2).$$

De aquí conluímos que $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$ son los valores propios de A. Los vectores propios asociados a $\lambda_1 = -1$ son

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El vector propio asociado a $\lambda_2 = -2$ es

$$v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, la solución general de la ecuación es

$$\vec{y}(t) = c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^{-t} v_2 + c_3 e^{-2t} v_3.$$

4. Usando Transformadas de Laplace resuelva el problema $y'' + 4y = g(t); \qquad y(0) = y'(0) = 0,$

$$\text{con} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 5, \\ (t-5)/5 & 5 \le t < 10, \\ 1 & t \ge 10. \end{cases}$$

Solución:

Primero que nada escribimos $g(t)$ usando la función escaloón unitario $u(t)$ (de Heaviside) :

$$g(t) = \frac{1}{5}\left[u(t-5)(t-5) - u(t-10)(t-10)\right]$$

Por tanto, si $Y(s)$ denota la transformada de Laplace de la función incógnita, $y(t)$, tenemos que

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{1}{5}\mathcal{L}\left(\, u(t-5)(t-5) - u(t-10)(t-10)\,\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{e^{-5s}}{s^2} - \frac{e^{-10s}}{s^2}\right),$$

de donde

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left(e^{-5s} - e^{-10s}\right)\frac{1}{s^2\,(s^2+4)}.$$

Tomando anti–transformadas obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{5}\left[u(t-5)f(t-5) - u(t-10)f(t-10)\right]$$

donde $f(t)$ es la anti–transformada de $\dfrac{1}{s^2\,(s^2+4)}$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2\,(s^2+4)}\right) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{t}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{8}.$$

Por tanto,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 5, \\ \dfrac{t}{20} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{\operatorname{sen}(2t-10)}{40} & 5 \le t < 10, \\ \dfrac{1}{4} - \dfrac{\operatorname{sen}(2t-10)}{40} + \dfrac{\operatorname{sen}(2t-20)}{40} & t \ge 10. \end{cases}$$

5. Estudiar el carácter de todos los puntos críticos del sistema $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x - y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} &= x - 2y + x^2. \end{cases}$

Solución:

Los puntos críticos del sistema son las soluciones de

$$x = y^2, \quad x - 2y + x^2 = 0,$$

lo que es equivalente con

$$x = y^2, \quad y^4 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x = y^2, \quad y(y-1)(y^2+y+2) = 0,$$

luego los puntos críticos son $(0,0)$ y $(1,1)$.

Los sistemas linealizados en torno a $(0,0)$ y $(1,1)$ son, respectivamente,

$$(L_1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x \\ \dfrac{dy}{dt} &= x - 2y, \end{cases}$$

$$(L_2) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= (x-1) - 2(y-1) \\ \dfrac{dy}{dt} &= 3(x-1) - 2(y-1). \end{cases} \qquad \text{o, trasladando el origen,} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} &= 3x - 2y. \end{cases}$$

El polinomio característico asociado a (L_1) es $p_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ con raíces reales de signos distintos, por lo que se concluye que $(0,0)$ es un punto de silla inestable para el sistema original.

Por su parte, el polinomio característico asociado a (L_2) es $p_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 4$. Las soluciones de $p_2(\lambda) = 0$ son complejas con parte real negativa.

Por tanto, el punto $(1,1)$ es un punto espiral asintóticamente estable para el sistema original.

6. Considere el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= 2\left(x^2-3\,x+2\right)y\\ \frac{d}{dt}y(t) &= -2\,x-2-(2\,x-3)\,y^2\end{aligned}$$

y los puntos de equilibrio $(-1,0)$, $(1,2)$.

Determine su linealización en $(1,2)$. Grafique lo mejor posible su diagrama de fase (el de la linealización) en torno al punto $(1,2)$. ¿Qué puede decir sobre la naturaleza de cada uno de los puntos de equilibrio respecto del sistema original (Teorema de Hartman-Grobman)? Justifique.

Solución:

La linealización en torno a un punto $(\bar{x},\bar{y})$ es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2\bar{y}(2\bar{x}-3)(x-\bar{x})+2(\bar{x}^2-3\bar{x}+2)(y-\bar{y})\\ \frac{dy}{dt} &= -2(1+\bar{y}^2)(x-\bar{x})+(6\bar{y}-4\bar{x}\bar{y})(y-\bar{y})\end{aligned}$$

Luego, en torno a $(1,2)$ es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -4(x-1)\\ \frac{dy}{dt} &= -10(x-1)+4(y-2),\end{aligned}$$

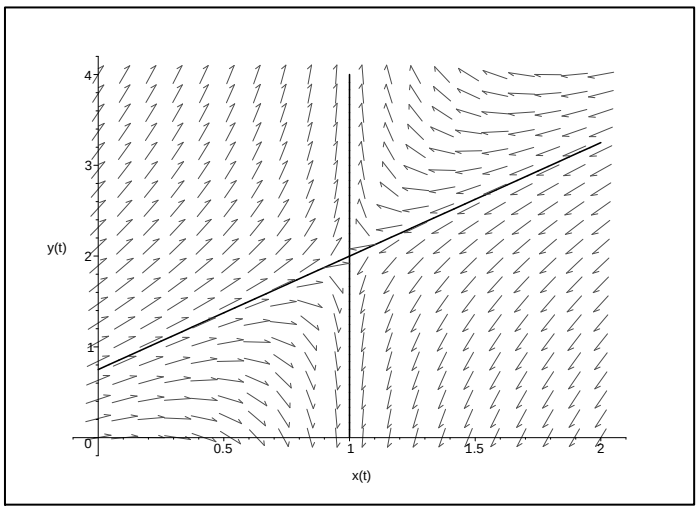
o, cambiando el origen al punto $(1,2)$ y usando notación matricial, es

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz A es $p_1(\lambda) = \lambda^2 - 16$, de modo que hay dos valores propios de signos opuestos, $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -4$.

Los vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = [0,1]^T$ y $\vec{v}_2 = [4,5]^T$.

El diagrama de fase luce aproximadamente así:



El criterio de linealización (Hartman–Grobman) establece que en este punto el sistema original tiene un punto silla inestable.

Por otro lado, la linealización en torno a $(-1, 0)$ es

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & 12y \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -2(x+1) \end{array} \qquad \text{o, alternativamente,} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de B es $p_2(\lambda) = \lambda^2 + 24$ con imaginarias puras. Luego el punto $(-1, 0)$ es un centro estable para el sistema linealizado y por lo tanto puede ser un centro o un punto espiral para el sistema original, y puede ser estable o inestable, asintóticamente estable o asintóticamente inestable. En otras palabras, no es posible saber con exactitud su carácter.