Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2025

# Interrogación 1 MAT1640

09 de Enero de 2025

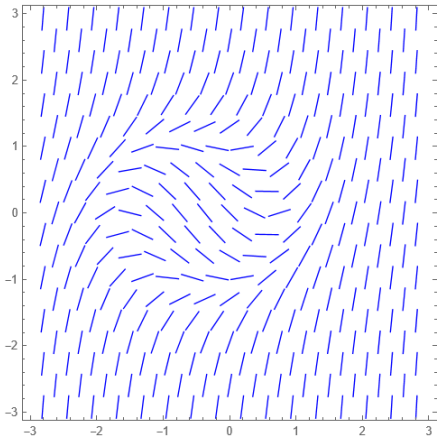
1. Considere la EDO

$$u' = u^2 + x^2 + x - 1.$$

*a*) ¿Es posible que dos curvas solución de esta EDO se intersecten? Justifique.

*b*) ¿Es posible que exista una solución constante de esta EDO? Justifique

*c*) El siguiente es un diagrama del campo de pendientes de la EDO en $[-3,3] \times [-3,3]$. Utilícelo para estimar el valor de $u(1)$ para una solución que cumple $u(-2) = -2$




**Una solución:**

*a*) No es posible. Si $u_1$ y $u_2$ son dos soluciones distintas que se intersectan en algún lugar $(a, b)$ entonces el PVI

$$u' = u^2 + x^2 + x - 1 \quad , \quad u(a) = b$$

tiene dos soluciones distintas. Sin embargo, al ser

$$f(x,u) = u^2 + x^2 + x - 1 \quad \text{y} \quad \partial_u f(x,u) = 2u$$

continuas en todo $\mathbb{R}^2$ el Teorema de Picard indica que esto no puede ocurrir, sea cual sea los valores de $a$ y $b$.

*b*) No es posible. Si $u = c$ fuese solución constante en un intervalo entonces se tendría

$$0 = c^2 + x^2 + x - 1$$

en ese intervalo, lo cual no es cierto pues el único polinomio que vale 0 en un intervalo es el polinomio 0.

*c*) Apartir del campo de pendientes se puede estimar que $u(1) \approx 0$.

**Asignación de puntaje:**

*a*)
- Indicar que el Teorema de Picard no permite intersección: **1 punto**
- Verificar que aplica el Teorema de Picard: **2 puntos**

*b*)
- Reemplazar $u$ constante en EDO: **1 punto**
- Observar que igualdad no es posible en un intervalo: **1 punto**

*c*)
- Estimar $u(1)$ entre $-1$ y 1: **1 punto**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de* ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

2. Considere el PVI

$$\cos(x)\frac{du}{dx} - u\,\mathrm{sen}(x) = 1 \quad , \quad u(6) = 1.$$

Determine una solución e indique el intervalo donde es solución. ¿Puede asegurar que esta solución es la única en ese intervalo? Justifique.

**Una solución:**

La EDO es lineal. Aunque se puede observar directamente que el lado izquierdo es una derivada, usamos el procedimiento estandar.

Al reescribir como

$$\frac{du}{dx} - u\tan(x) = \sec(x)$$

identificamos un factor integrante

$$\rho = e^{\int -\tan(x)dx} = e^{\ln\cos(x)} = \cos(x)$$

de modo que al multiplicar por $\rho$ volvemos a

$$\cos(x)\frac{du}{dx} - u\,\mathrm{sen}(x) = 1$$

y observamos ahora sí que entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x)u\right) = 1 \Rightarrow u\cos(x) = x + C \Rightarrow u = \frac{x+C}{\cos(x)}.$$

Requerimos

$$1 = u(6) = \frac{6+C}{\cos(6)} \Rightarrow C = \cos(6) - 6$$

de modo que la solución del PVI es

$$u = \frac{x + \cos(6) - 6}{\cos(x)}.$$

Esta solución lo es en el intervalo $(3\pi/2, 5\pi/2)$; este es el intervalo maximal, que contiene $x = 6$, donde la solución está bien definida y satisface la EDO. Además, el Teorema de existencia para EDOs lineales garantiza que esta solución es la única en este intervalo pues $\tan(x)$ y $\sec(x)$ son continuas allí.

**Asignación de puntaje:**

- Escribir EDO en forma lineal (asignar puntaje si se reconoce derivada directamente): **1 punto**
- Identificar función para cálculo de factor integrante (asignar puntaje si se reconoce derivada directamente): **0,5 puntos**
- Obtener un factor integrante (asignar puntaje si se reconoce derivada directamente): **1 punto**
- Obtener solución general: **1 punto**
- Indicar solución del PVI: **0,5 puntos**
- Identificar intervalo maximal correcto: **1 punto**
- Mencionar que unicidad se deduce de linealidad: **0,5 punto**
- Indicar que la hipotesis de continuidad se cumple en el intervalo: **0,5 puntos**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de **0,5 puntos**, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

3. *a*) Encuentre una familia de soluciones para

$$\frac{x}{u}u' + \ln x = \ln u + 1.$$

*b*) Resuelva el PVI

$$(2xy + x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -(x+y)^2 \quad , \quad y(1) = 1.$$

**Una solución:**

*a*) La EDO es homogenea, por lo que utilizamos

$$v = \frac{u}{x} \quad , \quad u = xv \quad , \quad u' = v + xv'$$

para transformarla en

$$\frac{v + xv'}{v} + \ln x = \ln x + \ln v + 1 \Rightarrow \frac{xv'}{v} = \ln v$$

la cual es separable. Entonces

$$\int \frac{1}{v \ln v} dv = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|\ln v| = \ln x + C \Rightarrow \ln v = C_1 x \Rightarrow v = e^{C_1 x} \Rightarrow u = xe^{C_1 x}.$$

*b*) Rescrita como

$$(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

identificamos

$$M = (x+y)^2 \quad , \quad N = 2xy + x^2 - 1$$

y como

$$\partial_y M = 2(x+y) \quad , \quad \partial_x N = 2y + 2x$$

vemos que la EDO es exacta. Luego, calculamos

$$F = \int 2xy + x^2 - 1 dy = xy^2 + yx^2 - y + h(x)$$

y

$$(x+y)^2 = \partial_x F = y^2 + 2xy + h'(x) \Rightarrow h'(x) = x^2 \Rightarrow h(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Entonces, tenemos las soluciones implícitas

$$xy^2 + yx^2 - y + \frac{x^3}{3} = C$$

y de la condición inicial

$$1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} = C \Rightarrow C = \frac{4}{3}$$

de modo que obtenemos la solución

$$xy^2 + yx^2 - y + \frac{x^3}{3} = \frac{4}{3}.$$

**Asignación de puntaje:**

*a*)
- Observar EDO es homogénea (puede quedar implícito a partir de sustitución): **0,5 puntos**

- Utilizar sustitución adecuada: **0,5 puntos**
- Obtener EDO para $v$: **0,5 puntos**
- Resolver EDO para $v$: **1 punto**
- Recuperar $u$ :**0,5 puntos**

*b*)
- Verificar EDO es exacta (puede quedar implícito): **0,5 puntos**
- Integrar para determinar $F$: **0,5 puntos**
- Encontrar ecuación para $h$ derivando: **0,5 puntos**
- Determinar $h$: **0,5 puntos**
- Escribir familia de soluciones implícitas: **0,5 puntos**
- Escribir solución del PVI: **0,5 puntos**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de* ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*

4. Una cierta población $P(t)$ de peces en una pesquera, de la cual se extraen de manera constante $h$ especímenes por unidad de tiempo ($h > 0$), obedece la ley

$$\frac{dP}{dt} = P(2 - P) - h$$

donde $P$ está medida en miles de individuos. Suponga $P(0) = P_0 \in (0, 2]$. Estudiando los puntos críticos de la EDO, determine las condiciones necesarias a cumplir por $h$ y $P_0$ para que la población de peces no se extinga.

**Una solución:**

Los punto críticos $c$ son la soluciones de $P(2 - P) - h = 0$ (o $h - 2P + P^2 = 0$), es decir

$$c = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4h}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - h}.$$

De esto podemos deducir tres posibilidades:

*a*) Si $h > 1$ entonces no hay puntos críticos, $P(2 - P) - h$ es siempre negativo, y entonces toda solución tiende a la extinción.

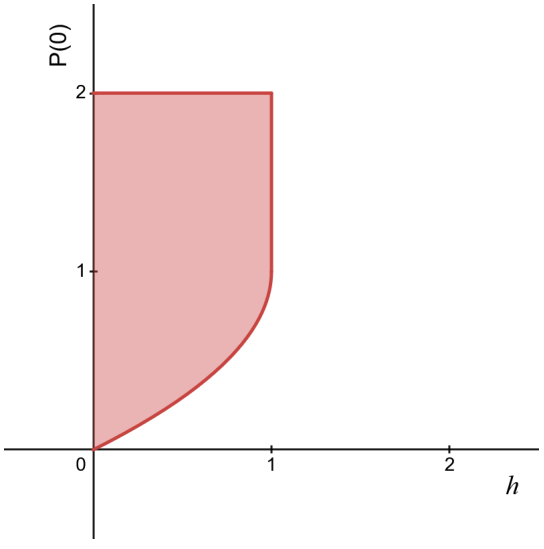
*b*) Si $h = 1$ entonces el único punto crítico es $c = 1$, $P(2 - P) - h$ es negativo alrededor de $c = 1$, y entonces es semi-estable. En particular, para que la población no se extinga debe ocurrir que $P_0$ esté a la derecha de (o ser igual que) $c = 1$, es decir, que $P_0 \geq 1$.

*c*) Si $h < 1$ entonces existen los puntos críticos $c_1 = 1 - \sqrt{1 - h}$ y $c_2 = 1 + \sqrt{1 - h}$. Observemos que $c_1 < c_2$, y que un análisis de signos de $P(2 - P) - h$ (cuadrática con coeficiente lider negativo) muestra que $c_1$ es repelente mientras que $c_2$ es atractor. Luego, para que la población no se extinga se necesita que $P_0 \geq c_1$.

Resumiendo, vemos que se evita la exitinción de la población bajo las condiciones

$$\begin{cases} h \leq 1 \\ P_0 \geq 1 - \sqrt{1 - h} \end{cases}.$$

El siguiente diagrama muestra la región representada por estas condiciones:




**Asignación de puntaje:**

- Identificar puntos crítico para $h > 1$: **0,5 puntos**
- Identificar puntos crítico para $h = 1$: **0,5 puntos**
- Identificar puntos crítico para $h < 1$: **1 punto**
- Justificar que para $h > 1$ no se puede prevenir extinción: **0,5 puntos**
- Explicitar naturaleza del punto crítico en el caso $h = 1$: **0,5 puntos**
- Deducir que para $h = 1$ se requiere $P_0 \geq 1$ : **1 punto**
- Explicitar naturaleza de los puntos críticos en el caso $h < 1$: **1 punto**
- Deducir que para $h < 1$ se requiere $P_0 \geq c_1$: **1 punto**

*Asignación de puntaje parcial: para cada hito podrá asignarse puntaje parcial, en múltiplos de* ***0,5 puntos****, si el hito se alcanza parcialmente o con errores. Si un hito se logra con errores, de modo que estos errores cambian las respuestas esperadas para los siguientes hitos, estos hitos siguientes pueden tener puntaje completo asignado siempre y cuando el desarrollo de la respuesta sea en lo escencial igual al esperado.*