PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Segundo semestre 2025

Interrogación 2 - MAT1640

Instrucciones: Responda de forma clara y justifique todos los pasos. Duración: **2 horas**.
Puntaje total: **60 puntos**.

Pregunta 1. (15 puntos)

Considere la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \qquad x > 0,$$

para la cual se sabe que $y_1(x) = x^2$ es solución.

(a) Usando la **fórmula de Abel**, calcule el wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ entre y_1 y alguna otra solución y_2 linealmente independiente. (7 puntos)

(b) Considere la definición del wronskiano

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2.$$

A partir de esto, construya una **ecuación lineal de primer orden para** y_2 y resuélvala para encontrar la segunda solución linealmente independiente. (8 puntos)

Pregunta 2. (15 puntos)

Considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' - y = 72x^5$$

cuya solución complementaria es $y_c = c_1x + c_2x^{-1}$. Encuentre la solución general.

Pregunta 3. (15 puntos)

Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + y = \cos(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Pregunta 4. (15 puntos)

Considere una masa de 9 [Kg] sujeta a un resorte cuya constante de Hooke es de $k = 4$ [N/mt] y a un amortiguador cuya constante de amortiguamiento es $c = 12$ [Kg/s]. Sea $x(t)$ el desplazamiento de la masa (con respecto a su posición de equilibrio) en el tiempo t.

1. Plantee la ecuación diferencial que satisface $x(t)$ y encuentre su solución general. Luego, escriba la solución general en términos de $v_0 := x'(0)$ y $x_0 := x(0)$. (8 puntos)
2. Si $x_0 = -5$ [mt]. ¿Para qué valores de v_0 la masa pasa por el punto de equilibrio? (7 puntos)

Pauta Interrogación 2 – MAT1640

Pontificia Universidad Católica de Chile — Facultad de Matemáticas
Segundo semestre 2025

Pregunta 1 (15 pts)

Solución. **(a)** Al dividir la ecuación por x^2 queda en forma normal

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

con $P(x) = -3/x$. La fórmula de Abel nos dice que para cualquier par de soluciones y_1, y_2 linealmente independientes,

$$W(y_1, y_2)(x) = K\, e^{-\int P(x)\,dx} = K\, e^{-\int (-3/x)\,dx} = K\, x^3,$$

con K alguna constante distinta de cero. Por ejemplo, tomando $K = 1$ queda $\boxed{W(y_1, y_2)(x) = x^3}$

(b) Por definición $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Con $y_1 = x^2$, $y_1' = 2x$ y usando $W = x^3$, se obtiene

$$x^2 y_2' - 2x\, y_2 = x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{y_2' - \frac{2}{x}y_2 = x}$$

Factor integrante $\mu(x) = e^{\int -2/x\,dx} = x^{-2}$. Entonces $(x^{-2}y_2)' = x^{-1} \Rightarrow x^{-2}y_2 = \ln x + C \Rightarrow y_2 = x^2(\ln x + C)$. Una segunda solución linealmente independiente es $\boxed{y_2(x) = x^2 \ln x}$.

Puntajes.

1. **[3 pts]** Lleva la ecuación a forma normal y reconoce $P(x) = -3/x$.
2. **[4 pts]** Aplica correctamente la fórmula de Abel y deduce $W(x) = K\, x^3$ (o con algún valor numérico para K). Este puntaje no se asigna si es que se obtuvo el wronskiano calculando primero y_2 y luego $W(y_1, y_2)$ por definición.
3. **[2 pts]** Plantea la ecuación lineal $y_2' - (2/x)y_2 = x$ a partir de $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ (o la ecuación crrespondiente con la constante K). Este puntaje se asigna independiente de como llegaron a obtener el wronskiano (debe estar calculado correctamente).
4. **[3 pts]** Encuentra el factor integrante $\mu = x^{-2}$ y resuelve la ecuación de primer orden.
5. **[3 pts]** Entrega la solución independiente $y_2 = x^2 \ln x$ (o la expresión correspondientes con constantes K y/o C).

Pregunta 2 (15 pts)

Solución. Llevamos la ecuación a forma normal (dividiendo por x^2):

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 72x^3.$$

La ecuación homogénea asociada tiene soluciones linealmente independientes $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^{-1}$. y su wronskiano es

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2 = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) - (1)\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x}.$$

Para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$, la fórmula de variación de parámetros da

$$y_p = -y_1\int \frac{y_2\, f}{W}\, dx \;+\; y_2\int \frac{y_1\, f}{W}\, dx,$$

donde $f(x) = 72x^3$. Entonces

$$\frac{y_2\, f}{W} = \frac{\frac{1}{x}\cdot 72x^3}{-2/x} \;=\; \frac{72x^2}{-2/x} \;=\; -36x^3, \qquad \Rightarrow \quad \int \frac{y_2\, f}{W}\, dx = \int -36x^3\, dx \;=\; -9x^4 + C_1,$$

$$\frac{y_1\, f}{W} = \frac{x\cdot 72x^3}{-2/x} \;=\; \frac{72x^4}{-2/x} \;=\; -36x^5, \qquad \Rightarrow \quad \int \frac{y_1\, f}{W}\, dx = \int -36x^5\, dx \;=\; -6x^6 + C_2.$$

Por lo tanto,

$$y_p = -x(-9x^4) + x^{-1}(-6x^6) = 9x^5 - 6x^5 = 3x^5$$

y finalmente,

$$\boxed{y(x) = c_1x + c_2x^{-1} + 3x^5}$$

Puntajes.

1. **[2 pts]** Pasa a forma estándar $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 72x^3$.
2. **[3 pts]** Identifica correctamente $y_1 = x$ y $y_2 = x^{-1}$ y calcula el wronskiano $W = -2/x$ sin errores.
3. **[2 pts]** Plantea las integrales de variación de parámetros para y_p.
4. **[2 pts]** Calcula correctamente una integral de la fórmula de variación de parámetros.
5. **[2 pts]** Calcula correctamente la otra integral de la fórmula de variación de parámetros.
6. **[2 pts]** Escribe la solución particular y_p.
7. **[2 pts]** Escribe la solución general $y = y_c + y_p$.

Pregunta 3 (15 pts)

Solución. El polinomio característico es $p(r) = r^2 + 1 = 0$ y sus raíces son $r = \pm i$. Luego, la soluicón omplementaria es $y_c = C\cos(t) + D\,\mathrm{sen}(t)$.
Para obtener la slución particular hay dos maneras.
Forma 1. Como $\cos(t)$ resuena con la solución complementaria, es decir, la fuerza externa $f(t) = \cos(t)$ coincide con una parte de la solución complementaria, probamos con $y_p = At\cos(t) + Bt\,\mathrm{sen}(t)$.
Entonces

$$y_p' = A\cos(t) - At\,\mathrm{sen}(t) + B\,\mathrm{sen}(t) + Bt\cos(t),$$
$$y_p'' = -2A\,\mathrm{sen}(t) - At\cos(t) + 2B\cos(t) - Bt\,\mathrm{sen}(t)$$

y por lo tanto

$$y_p'' + y_p = 2B\cos(t) - 2A\,\mathrm{sen}(t).$$

Igualando a $\cos(t)$ se obtiene $A = 0$ y $B = 1/2$, es decir $y_p(t) = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t)$.

Forma 2. Usando variación de parámetros obtenemos:

$$W = W(\cos(t), \mathrm{sen}(t)) = \cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t) = 1,$$

luego,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -\cos(t)\int \frac{\mathrm{sen}(t)\cos(t)}{1}dt + \mathrm{sen}(t)\int \frac{\cos(t)\cos(t)}{1}dt \\ &= -\cos(t)\int \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}dt + \mathrm{sen}(t)\int \frac{\cos(2t)+1}{2}dt \\ &= \cos(t)\frac{\cos(2t)}{4} + \mathrm{sen}(t)\frac{\mathrm{sen}(2t)}{4} + \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t). \end{aligned}$$

Notar que

$$\cos(t)\frac{\cos(2t)}{4} + \mathrm{sen}(t)\frac{\mathrm{sen}(2t)}{4} = \frac{1}{4}(\cos(t)(1 - 2\,\mathrm{sen}^2(t)) + 2\,\mathrm{sen}^2(t)\cos(t)) = \frac{1}{4}\cos(t)$$

que es solución a la ecuación homogénea. Nos podemos quedar solamente con $y_p(t) = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t)$.

Finalmente, la solución general es $y(t) = C\cos t + D\,\mathrm{sen}\,t + \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,t$, donde además, $y'(t) = -C\,\mathrm{sen}\,t + D\cos t + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t + \frac{1}{2}t\cos t$. Usando las condiciones iniciales: $y(0) = C = 1,\ y'(0) = D = -1$ concluimos

$$\boxed{y(t) = \cos t - \sin t + \tfrac{1}{2}\,t\sin t}$$

Puntajes.

1. **[2 pts]** Encuentra correctamente las raíces del polinomio característico.
2. **[2 pts]** Encuentra la complementaria $y_c = C\cos t + D\sin t$.
3. **[3 pts]** Elige un candidato a solución particular $y_p = At\cos(t) + Bt\,\mathrm{sen}(t)$. Alternativamente, plantea la fórmula de variación de parámetros.
4. **[2 pts]** Calcula $y_p'' + y_p = 2B\cos(t) - 2A\,\mathrm{sen}(t)$. Alternativamente, calcula la primera integral de la fórmula de variación de parámetros.
5. **[2 pts]** Determina $A = 0,\ B = \frac{1}{2}$. Alternativamente, calcula la segunda integral de la fórmula de variación de parámetros.
6. **[2 pts]** Obtiene la solución particular $y_p(t) = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t)$ o una expresión análoga que puede contener términos linealmente dependientes con la solución complementaria.
7. **[2 pts]** Aplica correctamente $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$, obtiene los valores de las constante $C,\ D$ y escribe la solución correcta al PVI.

Pregunta 4 (15 pts)

Solución. 1) La ecuación de un sistema masa-resorte-amortiguador es de la forma: $mx'' + cx' + kx = 0$, por lo tanto, en este caso obtenemos la ecuación

$$9x'' + 12x' + 4x = 0.$$

Las raíces del polinomio característico se obtienen resolviendo $9r^2 + 12r + 4 = 0$, donde el discriminante es $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$ (caso críticamente amortiguado), por lo tanto, hay una raíz doble $r = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$.

La solución general queda

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{2}{3}t}.$$

donde

$$x'(t) = \big(C_2 - \tfrac{2}{3}C_1 - \tfrac{2}{3}C_2 t\big)e^{-\frac{2}{3}t},$$

Imponiendo las condiciones iniciales se obtiene

$$x(0) = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0 \quad \text{y} \quad x'(0) = v_0 = C_2 - \tfrac{2}{3}x_0 \Rightarrow C_2 = v_0 + \tfrac{2}{3}x_0.$$

Así, $\boxed{x(t) = \big(x_0 + (v_0 + \frac{2}{3}x_0)t\big)\, e^{-\frac{2}{3}t}}$.

2) La masa pasa por el punto de equilibrio si $x(t) = 0$ para algún $t > 0$. Como el factor exponencial nunca es cero, de debe resolver

$$x_0 + (v_0 + \tfrac{2}{3}x_0)t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-x_0}{v_0 + \frac{2}{3}x_0} = \frac{5}{v_0 - \frac{10}{3}}.$$

Se deduce que existe un tiempo $t > 0$ tal que la masa pasa por el punto de equilibrio si y sólo si $v_0 - \frac{10}{3} > 0$, es decir, $\boxed{v_0 > \frac{10}{3} \text{ m/s}}$. Notar que si $v_0 = \frac{10}{3}$, entonces $C_2 = 0$ en la solución general y por lo tanto $x(t) = -5e^{-\frac{2}{3}t} < 0$ para todo $t \geq 0$, es decir, no pasa por el equilibrio.

Puntajes.

1. **[2 pts]** Plantea $9x'' + 12x' + 4x = 0$ correctamente a partir de m, c, k.
2. **[3 pts]** Encuentra la solución general $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{2}{3}t}$.
3. **[1 pts]** Usa $x(0) = x_0$ para obtener $C_1 = x_0$.
4. **[2 pts]** Calcula $x'(t)$ y obtiene $C_2 = v_0 + \frac{2}{3}x_0$.
5. **[2 pts]** Plantea la condición de cruce $x(t) = 0$.
6. **[2 pts]** De la ecuación de la parte anterior, obtiene la relación $t = \frac{5}{v_0 - \frac{10}{3}}$.
7. **[2 pts]** Concluye el conjunto de velocidades: $v_0 > \frac{10}{3}$
8. **[1 pts]** Descarta (justificando) el caso límite $v_0 = 10/3$.
